UNITÄRE GRUPPEN
ÜBER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Munibur Rahman Chowdhury
aus Faridpur, Ostpakistan

Göttingen 1967

Fotodruck: Andreas FUNKE, Offsetdruck
34 Göttingen, Wendenstraße 5b

UNITÄRE GRUPPEN ÜBER ALGEBRAISCHEN ZAHLKÖRPERN

DISSERTATION

zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Munibur Rahman Chowdhury
aus Faridpur, Ostpakistan

Göttingen 1967

D 7

Referent : Professor Dr. M. Kneser

Korreferent : Professor Dr. M. Deuring

Tag der mündlichen Prüfung : 15. Dezember 1967

Diese Arbeit wurde am
Mathematischen Institut der Universität Göttingen
durchgeführt

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Vervielfältigt mit Unterstützung des
Deutschen Akademischen Austauschdienstes

Inhaltsverzeichnis

Seite

Einleitung 1

Kapitel I. DIE FASTEINFACHHEIT DER KOMMUTATORGRUPPE AUF DIREKTEM WEGE

§ 1. Vorbemerkungen 9

1.1 Körper mit involutorischen Antiautomorphismen 9

1.2 Spiegelungen 11

1.3 Die Faktorgruppe U_n/U_n^+ 14

1.4 Stetigkeitssatz. Schwacher Approximationssatz 16

§ 2. Lokales Verhalten; HASSE-Prinzip 18

2.1 Vorbemerkungen 18

2.2 Lokales Verhalten in den Fällen I,II 19

2.3 Lokales Verhalten im Fall III 21

2.4 Lokales Verhalten im Fall IV 24

§ 3. Erzeugung von $U_n(V)$ durch spezielle Isometrien 29

3.1 Vorbereitungen zum Satz 1 29

3.2 Beweis von Satz 1 36

§ 4. Direkter Beweis der Fasteinfachheit 43

4.1 Zurückführung auf Normalteiler von U_n 43

4.2 Schluss des Beweises 50

Kapitel II. BESTIMMUNG DER KOMMUTATORGRUPPE UND BEWEIS DER FASTEINFACHHEIT MITTELS ISOMORPHISMEN

§ 5. Isogenie zwischen U_4^+ (Fall I) und O_6' 59

5.1 Konstruktion der hermiteschen Form 59

5.2 Zum Isomorphismus $U_4^+(K,h) \cong Spin_6(k,f)$ 65

§ 6. Isogenie zwischen U_2 (Fall II) und O_5' 73

§ 7. Bestimmung der Kommutatorgruppe (in den Fällen I,II) 78

§ 8. Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe mittels Isomorphismen 86

Literaturverzeichnis 91

Meinem verehrten Lehrer

Emil A r t i n

und

meinem geliebten Bruder

Masihur Rahman Chowdhury

zum Gedächtnis

Einleitung

Diese Arbeit beschäftigt sich mit der Struktur der unitären Gruppen. Eine zusammenfassende Darstellung der in dieser Arbeit vorkommenden Grundbegriffe und -tatsachen findet man im Ergebnisbericht von Dieudonné, [6], an dessen Bezeichnungen wir uns anschliessen.

Ehe wir unsere spezifische Aufgabe erläutern, geben wir einen kurzen Überblick über die Struktur der klassischen Gruppen. Unter klassischen Gruppen verstehen wir die allgemeine lineare Gruppe $GL_n(K)$ über einem nicht notwendig kommutativen Körper K und solche Untergruppen davon, die gegebene nicht-ausgeartete symmetrische, alternierende oder hermitesche Bilinearformen (mit Koeffizienten aus K) festlassen.

Die Struktur der Gruppe $GL_n(K)$ ist wohlbekannt. Ihre Kommutatorgruppe $SL_n(K)$, die sich geometrisch als die von den Transvektionen erzeugte Untergruppe von $GL_n(K)$ kennzeichnen lässt, ist der Kern der Determinante,

$$\det : GL_n(K) \to K^a,$$

wobei K^a die Faktorgruppe von K^* nach seiner Kommutatorgruppe bezeichnet. Es gilt also, $GL_n(K)/SL_n(K) \cong K^a$.

Eine Gruppe heisse fasteinfach, wenn jeder echte Normalteiler im Zentrum enthalten ist. Die Faktorgruppe modulo dem Zentrum ist dann einfach.

Die Gruppe $SL_n(K)$ ist, für $n \geqslant 2$, von zwei Ausnahmen ($n=2$, $K = F_2$, F_3) abgesehen, stets fasteinfach.

Die Struktur der symplektischen Gruppe $Sp_n(K)$ — das ist die Gruppe der Transformationen $u \in GL_n(K)$, die eine nicht-ausgeartete alternierende Bilinearform (n ist dann notwendig gerade) festlässt — ist leicht zu klären; sie ist, für $n \geqslant 2$, von zwei Ausnahmen ($n=2$, $K = F_2$, F_3) abgesehen, stets fasteinfach.

Bei der Struktur der orthogonalen und unitären Gruppen ist das unterschiedliche Verhalten von isotropen und anisotropen Formen kennzeichnend. Im Fall einer isotropen quadratischen oder hermiteschen Form (das ist eine Form, die 0 nicht-trivial darstellt), lassen sich allgemein gültige — das heisst, vom Grundkörper unabhängige — Strukturs̈atze über deren orthogonalen oder unitären Gruppe gewinnen.

Für eine isotrope quadratische Form f in n Variablen über einem kommutativen Körper K der Charakteristik $\neq 2$ ist die Faktorgruppe O_n^+/O_n', für $n \geqslant 2$, vermöge der Spinornorm isomorph zu K^*/K^{*2}; dabei bezeichnet O_n^+ die eigentlich orthogonale Gruppe und O_n' den Spinorkern, der dann mit der Kommutatorgruppe Ω_n der orthogonalen Gruppe $O_n(K,f)$

übereinstimmt. Für $n \geqslant 5$ ist Ω_n fasteinfach.

Für orthogonale Gruppen über Körpern der Charakteristik 2 gelten ähnliche Sätze. Eine ausführliche Darstellung der bis jetzt zitierten Ergebnisse findet man bei Artin [2], chap. IV, V.

Für unitäre Gruppen zu isotropen hermiteschen Formen über einem Körper mit einem involutorischen Antiautomorphismus (kurz: Involution) hat man analoge Ergebnisse, die im einzelnen zum Teil von der Natur der Involution abhängen.

Man kann demgegenüber Beispiele anisotroper quadratischer und hermitescher Formen über speziellen Grundkörpern angeben (siehe [6], chap. II, § 12 und die dort angegebene Literatur), die erkennen lassen, dass die Struktur der orthogonalen und unitären Gruppen anisotroper Formen wesentlich von der Natur des Grundkörpers abhängt. Besonderes Interesse als Grundkörper kommt den algebraischen Zahlkörpern zu.

Für die orthogonale Gruppe einer anisotropen quadratischen Form in $n \geqslant 3$ Variablen über einem algebraischen Zahlkörper hat die Frage nach der Struktur der Gruppen O_n^+/O_n', O_n'/Ω_n, $\Omega_n/\Omega_n \cap Z_n$ in der Arbeit [12] von M.Kneser eine befriedigende Antwort gefunden; er bewies u.a. :

für $n \geqslant 5$ ist $\Omega_n = O_n'$ und ist fasteinfach.

In der erwähnten Arbeit hat M.Kneser angekündigt,

dass auch für eine anisotrope hermitesche Form in n Variablen über einer quadratischen Erweiterung K eines algebraischen Zahlkörpers k, die analogen Sätze,

$$U_n^+ = U_n' \quad \text{und} \quad U_n' \text{ ist fasteinfach,}$$

gelten, wenn nur $n \geqslant 5$ ist. Dabei bezeichnet U_n^+ die eigentlich unitäre Gruppe und U_n' die Kommutatorgruppe der unitären Gruppe U_n .

Wie M.Kneser [12] hinweist, läßt sich die Gleichheit $U_n^+ = U_n'$ durch Induktion nach n beweisen, wobei am Induktionsanfang eine grundsätzlich schon bekannte Isogenie zwischen der unitären Gruppe einer anisotropen hermiteschen Form h in 4 Variablen über K mit der Diskriminante 1 und der orthogonalen Gruppe einer zu h gehörigen quadratischen Form in 6 Variablen über k, die ebenfalls anisotrop ist, herangezogen wird.

Zum Beweis der Fasteinfachheit der Gruppe U_n' führen dagegen zwei Möglichkeiten zum Ziel. Die eine benutzt die erwähnte Isomorphie; der darauf fussende Beweis ist, nachdem $U_n^+ = U_n'$ bewiesen worden ist, ziemlich einfach. Die andere besteht in der Übertragung des Beweises im orthogonalen Fall. Diese Methode hat den Vorteil, dass sie sich zum Beweis der entsprechenden Aussage für andere Typen unitärer Gruppen übertragen lässt.

Hermitesche Formen lassen sich über einem beliebigen, mit einer Involution versehenen Körper erklären. Wenn das

Zentrum ein algebraischer Zahlkörper ist, so sind die verschiedenen Typen unitärer Gruppen, die für uns in Betracht kommen, die folgenden.

Fall I. Die unitäre Gruppe einer hermiteschen Form über einer quadratischen Erweiterung D eines algebraischen Zahlkörpers k, bzgl. des nicht-identischen Automorphismus J von D über k.

Fall II. Die unitäre Gruppe einer hermiteschen Form über einem Quaternionenschiefkörper D, dessen Zentrum k ein algebraischer Zahlkörper ist, bzgl. der Standardinvolution J von D.

Fall III. Die unitäre Gruppe einer hermiteschen Form über einem Schiefkörper D, von endlichem Rang über seinem Zentrum K, der ein algebraischer Zahlkörper ist, bzgl. einer Involution J, die nicht das ganze Zentrum elementweise festlässt (sog. Involution zweiter Art).

Fall IV. Die unitäre Gruppe einer schiefhermiteschen Form über einem Quaternionenschiefkörper D, dessen Zentrum k ein algebraischer Zahlkörper ist, bzgl. der Standardinvolution J von D.

Das Hauptergebnis dieser Arbeit ist die Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe U_n' der unitären Gruppe U_n einer anisotropen Form in jedem der Fälle I,II,III,IV, falls nur n nicht zu klein ist. (Siehe Theorem A, §4.2 Ende)

Das wesentliche Hilfsmittel zum Beweis ist, neben dem schwachen Approximationssatz, das HASSE-Prinzip. Es gilt in den Fällen I,II,III im selben Umfang wie für quadratische Formen (Sätze 66:1, 66:3, 66:4 in O'Meara [17], pp. 187-189). Im Fall IV gilt es nur in schwächerer Form, die aber für unseren Zweck ausreicht.

Das erste Kapitel ist dem Beweis der Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe auf direktem Wege gewidmet; er besteht in der Übertragung des Beweises im orthogonalen Fall. In §1 stellen wir einige vorbereitende Bemerkungen und Betrachtungen zusammen. In §2 wird an das jeweilige lokale Verhalten und ans Hasse-Prinzip errinert. Der Beweis der Fasteinfachheit von U_n' besteht aus zwei Schritten. Im ersten Schritt (§4.1) wird gezeigt, dass jeder nicht im Zentrum enthaltene Normalteiler N' von U_n' einen Normalteiler N der ganzen Gruppe U_n enthält, der ebenfalls nichtzentral ist. Im zweiten Schritt wird dann gezeigt, dass N die Kommutatorgruppe U_n' umfasst. In den beiden Schritten verwenden wir einen Satz, der besagt, dass die unitäre Gruppe bereits von solchen Spiegelungen s_a erzeugt wird, für die h(a) in W dargestellt wird, wobei W ein vorgegebener (nicht-ausgearteter) Teilraum der Dimension ≥ 2 ist, der im Fall IV an den kritischen Primstellen isotrop ist; in jedem der Fälle I,II,III darf W beliebig sein (Satz 1, §3.2). Dieser Satz ist als ein Kernpunkt des Beweises

anzusehen und wird in §3 vorweggenommen. Der gesamte Beweis verläuft im wesentlichen einheitlich für alle genannten Fälle; man muss nur dem jeweiligen lokalen Verhalten Rechnung tragen, was eine gelegentliche Fallunterscheidung nötig macht.

Die bekannten Isogenien zwischen unitären Gruppen niedriger Dimensionen der ersten beiden Typen und orthogonalen Gruppen, gestatten die genaue Bestimmung der Kommutatorgruppe in diesen Fällen. Darauf fußend, kann man anschliessend die Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe von neuem beweisen.

Im Fall I besteht ein Isomorphismus (§5.)

(1) $$U_4^+(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_6'(k,f),$$

wobei h eine anisotrope hermitesche Form in 4 Variablen über D mit der Diskriminante 1 ist, und f eine zu h gehörige anisotrope quadratische Form in 6 Variablen über k ist, die über D den maximalen Index,3, hat.

Im Fall II besteht ein Isomorphismus (§6.)

(2) $$U_2(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_5'(k,f),$$

wobei h eine anisotrope J-hermitesche Form in 2 Variablen über dem Quaternionenschiefkörper D ist, und f eine anisotrope quadratische Form in 5 Variablen über k ist, derart dass f über einer durch D und h eindeutig bestimmten quadratischen Erweiterung K von k den maximalen

Index, 2, hat.

Man kann jeden dieser Isomorphismen dadurch gewinnen, dass man umgekehrt von der quadratischen Form f ausgeht und mit Hilfe der Cliffordalgebra von f die hermitesche Form h konstruiert. In dem Fall I ist dieser Weg von entscheidender Bedeutung, denn er gestattet uns im Gegensatz zur Methode von Dieudonné [9] , bis zum Isomorphismus (1) vorzustossen.

Unter Benutzung dieser Isomorphismen und der Sätze von M. Kneser, beweisen wir durch Induktion nach der Dimension, dass im Fall I,

$$U_n' = U_n^+ \quad \text{für} \quad n \geqslant 5,$$

bzw. im Fall II,

$$U_n' = U_n \quad \text{für} \quad n \geqslant 2$$

gilt.

Der Beweis der Fasteinfachheit von U_n^+ bzw. U_n' für dieselben Werte von n ist dann ziemlich leicht.

Kapitel I.

DIE FASTEINFACHHEIT DER KOMMUTATORGRUPPE AUF DIREKTEM WEG

§ 1. Vorbemerkungen

1.1 Körper mit involutorischen Antiautomorphismen

Es sei D ein Körper mit einem involutorischen Antiautomorphismus J. Wenn D von endlichem Rang über seinem Zentrum K ist, so ist dieser bekanntlich ([5], p.47, Satz 15) eine Quadratzahl m^2. Für eine Involution J besteht dann eine der folgenden drei Möglichkeiten ([6], p.48; eine Beweisskizze findet man in [8], p.378) :

A. J ist die Identität auf K.

Dann können zwei Unterfälle eintreten, die die Menge $D^s = \{\alpha \in D: \alpha^J = \alpha\}$ der bzgl. J symmetrischen Elemente von D betreffen :

Die Dimension von D^s als Vektorraum über K ist

A_1. $\frac{m}{2}\cdot(m+1)$ bzw. A_2. $\frac{m}{2}\cdot(m-1)$.

B. J ist nicht die Identität auf K.

Dann ist $k = D^s \cap K$, die Menge der symmetrischen

Elemente vom Zentrum, ein Teilkörper von K derart, dass $K = k(\omega)$ eine separable quadratische Erweiterung von k ist und dass $\dim_k D^s = m^2$ gilt.

Im Fall A heisst J von erster Art, im Fall B von zweiter Art. Wenn D kommutativ und J nicht die Identität ist (was wir stets voraussetzen werden), so liegt der Fall B vor.

Wenn J von erster Art und das Zentrum K ein algebraischer Zahlkörper ist, so ist bekanntlich ([1] , p.161, Theorem 20) D eine Quaternionenalgebra über K oder D=K .

Es sei also nun D eine Quaternionenalgebra über K. Hierbei bezeichne J stets die Standard- oder kanonische Involution von D, die durch die Eigenschaften

$$\alpha^J = \alpha \iff \alpha \in K \quad \text{und} \quad \alpha + \alpha^J = \mathrm{Sp}\,\alpha,$$

gekennzeichnet ist. Jede andere Involution I von D ist (nach dem Satz von Noether-Skolem) von folgender Gestalt :

$$\xi^I = \alpha\, \xi^J\, \alpha^{-1} \quad \text{mit einem } \alpha \in D^*, \quad \alpha^J = -\alpha,$$

und zwar ist I vom Typ A_1. Ist andererseits I eine nichtkanonische Involution von D, so ist die durch

$$\xi \to \gamma\, \xi^I\, \gamma^{-1} \quad \text{mit einem } \gamma \in D^*, \quad \gamma^I = -\gamma,$$

definierte Involution die kanonische.

Daraus folgt (vgl. [6] , p.12), dass man sich bei der Betrachtung hermitescher und schiefhermitescher Formen über D bezüglich beliebiger Involution von D, auf J-hermitesche und J-schiefhermitesche Formen beschränken

kann.

Wenn J von zweiter Art ist, so genügt es, nur J-hermitesche Formen zu betrachten, da man aus einer J-schiefhermiteschen Form durch Multiplikation mit ω, was an der unitären Gruppe nichts ändert, eine J-hermitesche erhält.

Die verschiedenen Typen unitärer Gruppen, die für uns in Betracht kommen, sind also die auf p. 5 aufgezählten.

1.2 Spiegelungen

In diesem und dem folgenden Unterparagraphen ist D ein beliebiger Körper mit einer Involution J und h eine nicht-ausgeartete J-hermitesche oder schiefhermitesche Form in $n \geq 1$ Variablen über D. V sei ein n-dimensionaler Rechtsvektorraum über D, auf den die Form h aufgeprägt werde.

Bezeichnungen. Für $h(a,a)$, $a \in V$, schreiben wir stets $h(a)$. Statt α^J, für $\alpha \in D$, schreiben wir oft $\bar{\alpha}$.

Wichtige, spezielle Isometrien (unitäre Transformationen) sind die Spiegelungen. Eine Spiegelung — in der Literatur ([6] , p.25) auch Quasispiegelung genannt — ist eine Isometrie, die einen anisotropen Vektor $a \in V$ in ein Vielfaches $a\alpha$ überführt und die zur Geraden $\langle a \rangle$

senkrechte Hyperebene, $\langle a\rangle^{\perp} = \{x \in V : h(a,x) = 0\}$, elementweise festlässt. Dann gilt $\bar{\alpha}\, h(a)\alpha = h(a)$. Umgekehrt gibt es zu jedem anisotropen Vektor $a \in V$ und zu jedem $\alpha \in D^*$ mit $\bar{\alpha}\, h(a)\alpha = h(a)$, eine Spiegelung ${}^{\alpha}s_a$, die durch die Formel

(1.1) $$ {}^{\alpha}s_a(x) = x + a(\alpha-1)h(a)^{-1}h(a,x) $$

ausgedrückt wird. Denn die so definierte lineare Transformation führt a in $a\alpha$ über, lässt die Hyperebene $\langle a\rangle^{\perp}$ elementweise fest, ist invertierbar und erfüllt die Gleichung $h(s_a(x),s_a(y)) = h(x,y)$. Den Spiegelungsfaktor, α, lassen wir fort, wenn es darauf nicht ankommt.

Es gilt, $ {}^{\alpha}s_a\, {}^{\beta}s_a = {}^{\alpha\beta}s_a $, $ {}^{\alpha}s_a^{-1} = {}^{\alpha^{-1}}s_a $.

Eine wichtige Formel ist die folgende :

(1.2) $$ u\, {}^{\alpha}s_a u^{-1} = {}^{\alpha}s_{ua} \quad \text{für jedes} \quad u \in U_n(V). $$

Von einer für uns belanglosen Ausnahme abgesehen, bilden die Spiegelungen stets ein Erzeugendensystem für die unitäre Gruppe U_n ([6], p.41).

Wichtig zur Untersuchung der unitären Gruppe ist der Isomorphiesatz von WITT samt seinen Folgerungen ([6], chap.I, §11).

Den folgenden Spezialfall des Wittschen Satzes werden wir oft ausnutzen (char $D \neq 2$ vorausgestzt) :

Es seien $a,b \in V$ zwei Vektoren mit $h(a) = h(b) \neq 0$.

Dann ist a-b oder a+b anisotrop. Ist etwa a-b anisotrop, so ist $\alpha = h(a-b,a)^{-1} h(a-b,b)$ definiert, erfüllt $\bar{\alpha}\, h(a-b)\alpha = h(a-b)$ und es gilt dann

(1.3) $$ {}^{\alpha}s_{a-b}(a) = b \ . $$

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus der Gleichung

$$ h(a-b) + h(a+b) = 4\, h(a). $$

Ist $h(a-b) \neq 0$, so muss offenbar $h(a-b,a) \neq 0$ und $h(a-b,b) \neq 0$ gelten. Die Gleichungen $\bar{\alpha}\, h(a-b)\alpha = h(a-b)$ und ${}^{\alpha}s_{a-b}(a) = b$ rechnet man mühelos nach.

Den Zentralisator, bezüglich U_n, einer Spiegelung s_a können wir leicht bestimmen.

LEMMA 1.

Für eine beliebige Spiegelung ${}^{\alpha}s_a \neq 1$ gilt für deren Zentralisator $Z(s_a)$

$$ Z(s_a) = \{ u \in U_n : u(a) = a\lambda \quad \text{für ein } \lambda \in D^{*} \text{ mit } \alpha\lambda = \lambda\alpha \} \ . $$

Beweis. Wir wählen eine Orthogonalbasis $a, e_2, \ldots, e_n$ von V. Für $u \in U_n$ gelte $u(a) = a\lambda$ mit $\alpha\lambda = \lambda\alpha$. Dann ist $u\,{}^{\alpha}s_a(e_i) = u(e_i)$ für alle $2 \leqslant i \leqslant n$; andererseits ist, wegen $h(a\lambda^{-1}, e_i) = \bar{\lambda}^{-1} h(a, e_i) = 0$,

$$ {}^{\alpha}s_a u(e_i) = u.u^{-1}\,{}^{\alpha}s_a u(e_i) = u\,{}^{\alpha}s_{u^{-1}(a)}(e_i), \text{ nach (1.2)}, $$

$$ = u\,{}^{\alpha}s_{a\lambda^{-1}}(e_i) = u(e_i) \qquad \text{für alle } 2 \leqslant i \leqslant n. $$

Ferner ist

$$ u\,{}^{\alpha}s_a(a) = u(a\alpha) = a\lambda\alpha = a\alpha\lambda = {}^{\alpha}s_a(a\lambda) $$

$$ = {}^{\alpha}s_a u(a). $$

Insgesamt folgt also, $u\,{}^{\alpha}s_a = {}^{\alpha}s_a u$, das heißt $u \in Z(s_a)$.

Um die andere Richtung zu zeigen, setzen wir für $u \in Z(s_a)$, $u(a) = a\lambda + c$, mit $\lambda \in D$ und $c \in \langle a \rangle^{\perp}$ an und müssen zeigen, dass $c=0$ ist. Es ist dann

$$a\lambda\alpha + c\alpha = u(a\alpha) = u^{\alpha}s_a(a) = {}^{\alpha}s_a u(a) = {}^{\alpha}s_a(a\lambda + c)$$
$$= a\alpha\lambda + c .$$

Daraus folgt, $c(\alpha-1) = a(\alpha\lambda - \lambda\alpha)$. Da a,c linear unabhängig sind, müssen beide Seite verschwinden. Somit ist $c = 0$ (wegen $\alpha \neq 1$) und $\alpha\lambda = \lambda\alpha$.

Wir sagen, V sei universell, wenn h jeden möglichen Wert aus D^* annimmt. Ist W ein nicht-ausgearteter Teilraum von V, so sagen wir W sei universell in V, wenn W jeden Wert aus $h(V)^* = h(V)-\{0\}$ darstellt.

Bekanntlich gilt ([18], p.237) :

(1.4) Ist V isotrop, so ist es universell.

1.3 Die Faktorgruppe U_n/U_n^+

Für die unitäre Gruppe $U_n(V)$ hat man die Normalreihe

$$U_n' \cap Z_n \subset U_n' \subset U_n^+ \subset U_n,$$

wobei Z_n das Zentrum von U_n, U_n' die Kommutatorgruppe von U_n und U_n^+ die eigentlich unitäre Gruppe, das ist die

Gruppe der Isometrien $u \in U_n(V)$ mit $\det u = 1$, bezeichnet. Ist D nicht-kommutativ, so ist unter "det" die Dieudonné-sche Determinante zu verstehen (siehe dazu [2], chap.IV).

Ist D kommutativ, so ist U_n/U_n^+, vermöge der Determinante, isomorph zur Normeinsgruppe

$$N_1(D) = \{\alpha \in D^* : \alpha\bar{\alpha} = 1\} \quad \text{von } D^* .$$

Kürzlich hat Böge-Becken [3] für eine beliebige unitäre Gruppe eine Spinornorm eingeführt, die gewissermassen analog zur Spinornorm im orthogonalen Fall ist. Setzen wir mit Böge-Becken h als schiefhermitesch voraus (dafür keine Einschränkung über J), so ist die Spinornorm θ ein Homomorphismus von $U_n(V)$ in die Gruppe D^*/SC, wobei C die Kommutatorgruppe von D^* und S die von $D^{*S} = \{\alpha \in D^* : \bar{\alpha} = \alpha\}$ erzeugte Untergruppe von D^* bezeichnet.

Es gilt (h spurig, falls char D = 2), ([3], Sätze 4,5):

Für einen isotropen Raum V der Dimension ≥ 2, ist die Sequenz

$$1 \to U_n'(V) \to U_n(V) \xrightarrow{\theta} D^*/SC \to 1$$

exakt. Das heißt, $U_n/U_n' \cong D^*/SC$.
Ferner gilt, $U_n/U_n^+ \cong D^*/F$ und $U_n^+/U_n' \cong F/SC$,
wobei $F = \{\alpha \in D^* : \alpha C = \bar{\alpha} C\}$ ist.

1.4 Stetigkeitssatz.

Schwacher Approximationssatz.

Wir brauchen mehrmals den folgenden

STETIGKEITSSATZ.

Es sei $k_\mathfrak{p}$ ein lokaler Körper ($\mathfrak{p}$ endlich oder reell unendlich) und $D_\mathfrak{p}$ eine quadratische Erweiterung von $k_\mathfrak{p}$ oder ein Quaternionenschiefkörper über $k_\mathfrak{p}$.

Es sei $h(x,y)=\sum_{i,j=1}^{n} \bar{\xi}_i \alpha_{ij} \eta_j$ eine nicht-ausgeartete J-hermitesche Form über $D_\mathfrak{p}$ $(n \geq 1)$.

Dann gibt es ein $\varepsilon>0$, derart dass jede nicht-ausgeartete hermitesche Form $\hat{h}$ gleicher Variablenzahl, $\hat{h}(x,y)=\sum \bar{\xi}_i \hat{\alpha}_{ij} \eta_j$, für die $|\alpha_{ij}-\hat{\alpha}_{ij}|_\mathfrak{p} < \varepsilon$ für alle $i,j= 1,\ldots,n$ gilt, äquivalent zu h ist.

Geometrisch ausgesprochen : Es sei V ein nicht-ausgearteter J-hermitescher Raum über $D_\mathfrak{p}$ mit einer Basis $e_1,\ldots,e_n$. Dann gibt es ein $\varepsilon>0$, so dass jeder nicht-ausgeartete J-hermitesche Raum $\hat{V}$ mit einer Basis $\hat{e}_1,\ldots,\hat{e}_n$, für die $|h(e_i,e_j)-\hat{h}(\hat{e}_i,\hat{e}_j)|_\mathfrak{p} < \varepsilon$ für alle $i,j= 1,\ldots,n$ gilt, isometrisch zu $\hat{V}$ ist.

Der Beweis ist wörtlich derselbe wie im orthogonalen Fall ([12],p.216), weil die Formenwerte in $k_\mathfrak{p}$ liegen.

Die Quelle des Stetigkeitssatzes ist die bekannte Tatsache, dass Elemente eines vollständig bewerteten Körpers, die genügend nahe bei 1 liegen, Quadrate sind.

Wir betrachten nun unitäre Gruppen über algebraischen Zahlkörpern. Wir errinern an den schwachen Approximationssatz, den wir als bekannt voraussetzen wollen. Für eine generelle Behandlung des schwachen Approximationssatzes für algebraische, insbesondere also für klassische, Gruppen sei auf M.Kneser [13] verwiesen. Eine elementare Begründung des Satzes in den Fällen I,II,IV findet man bei Böge-Becken ([3] , Sätze 10,11).

Es sei G eine über einem algebraischen Zahlkörper k definierte algebraische Gruppe, S eine endliche Primstellenmenge von k; G_k bzw. $G_{k_\mathfrak{p}}$ sei die Menge der über k bzw. $k_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in S$, rationalen Punkte von G, letztere versehen mit der durch $\mathfrak{p}$ gegebenen Topologie. Mittels der Diagonaleinbettung ist G_k in $G_S = \prod_{\mathfrak{p}\in S} G_{k_\mathfrak{p}}$ enthalten.
Man sagt, der schwache Approximationssatz gelte für G, wenn G_k in G_S dicht liegt, für jedes S.

In den Fällen I,II,III gilt, nach [13],(Fälle I,II auch nach [3]) der schwache Approximationssatz für die unitäre Gruppe U_n selbst; folglich gilt er auch für die Kommutatorgruppe U_n'. Im Fall IV gilt, nach [3] , der schwache Approximationssatz für die Kommutatorgruppe U_n'. In jedem Fall gestattet also U_n' schwache Approximation.

§ 2. Lokales Verhalten; HASSE-Prinzip

2.1 Vorbemerkungen

Von jetzt ab sei k ein algebraischer Zahlkörper, D eine quadratische Erweiterung von k, oder ein Quaternionenschiefkörper über k, oder aber ein Schiefkörper über $K = k(\omega)$ mit einer Involution zweiter Art.

Für jede Primstelle $\mathfrak{p}$ von k setze man,

$$D_{\mathfrak{p}} = D \underset{k}{\otimes} k_{\mathfrak{p}} , \quad K_{\mathfrak{p}} = K \underset{k}{\otimes} k_{\mathfrak{p}} , \quad V_{\mathfrak{p}} = V \underset{k}{\otimes} k_{\mathfrak{p}} .$$

Die Involution von D setzt sich in natürlicher Weise auf $D_{\mathfrak{p}}$ fort, ebenso die hermitesche Form h. Die Fortsetzung von J auf $D_{\mathfrak{p}}$ wird stets mit J bezeichnet; die von h auf $V_{\mathfrak{p}}$ wird manchmal aber mit $h_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. $D_{\mathfrak{p}}$ braucht zwar kein Körper zu sein, der Begriff der unitären Gruppe bleibt aber sinnvoll – $U_n(V_{\mathfrak{p}})$, die unitäre Gruppe von $h_{\mathfrak{p}}$, ist die Gruppe aller $D_{\mathfrak{p}}$-linearen Abbildungen von $V_{\mathfrak{p}}$ auf sich, die die Form $h_{\mathfrak{p}}$ fest lassen.

$D_{\mathfrak{p}}^{*}$ bezeichne sinngemäss die multiplikative Gruppe, d.h. die Gruppe der invertierbaren Elemente, von $D_{\mathfrak{p}}$. Unter einer Spiegelung verstehen wir nach wie vor eine Isometrie

der Gestalt

$$^{\alpha}s_a(x) = x + a(\alpha-1)h(a)^{-1}h(a,x)$$

mit $\alpha \in D_{\mathfrak{p}}^*$ und invertierbarem $h(a)$, $a \in V_{\mathfrak{p}}$. Schliessen wir die Identität aus (d.h. ist $\alpha \neq 1$), so verlangen wir, dass auch $\alpha-1$ invertierbar sein soll. $^{\alpha}s_a$ lässt sich dann schreiben,

$$s_a(x) = x - a\sigma^{-1}h(a,x), \quad \sigma \in D_{\mathfrak{p}}^* .$$

Die Isometriebedingung ist dann $h(a)=\sigma+\bar{\sigma}$ bzw. $=\sigma-\bar{\sigma}$, wenn h J-hermitesch bzw. J-schiefhermitesch ist.

Wir wollen sagen :

$\mathfrak{p}$ sei <u>unzerlegt</u>, wenn im Fall I $D_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist;

$\mathfrak{p}$ sei <u>verzweigt</u>, wenn im Fall II,IV $D_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist;

$\mathfrak{p}$ sei unzerlegt, wenn im Fall III $K_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist.

Andernfalls heisse $\mathfrak{p}$ zerlegt oder zerfallend bzw. <u>unverzweigt</u>.

Mit $P_e(k)$ bzw. $P_\infty^r(k)$ bezeichnen wir die Menge der endlichen bzw, reell unendlichen Primstellen von k.

2.2 <u>Lokales Verhalten in den Fällen I,II</u> ([15], [18], [20]).

In diesen Fällen kann man h als quadratische Form in 2n bzw. 4n Variablen über k (Fall I bzw. II) ansehen

und alsdann die Theorie der quadratischen Formen ausnutzen. Es ergibt sich also das HASSE-Prinzip :

Zwei hermitesche Formen über D sind genau dann äquivalent — das heisst, die zugehörigen Räume sind isometrisch —, wenn sie über jedem $D_\mathfrak{p}$ äquivalent sind; h stellt eine Zahl $\alpha \in k$ genau dann dar, wenn jedes $h_\mathfrak{p}$ es tut.

(2.1) Bereits ab $n \geqslant 2$ bzw. $n \geqslant 1$, im Fall I bzw. II, ist die lokale Bedingung für die Darstellbarkeit einer Zahl $\alpha \in k$ automatisch erfüllt für alle endlichen und für alle unendlichen zerfallenden bzw. unverzweigten Primstellen von k.

Für eine unzerlegte bzw. verzweigte Primstelle $\mathfrak{p}$ in $P_\infty^r(k)$ ist $D_\mathfrak{p}$ der Körper der komplexen Zahlen oder der Schiefkörper der der gewöhnlichen Quaternionen über den reellen Zahlen. Über diesen Körpern sind die Dimension und die Anzahl ν, $0 \leqslant \nu \leqslant n$, der Vektoren e_i in einer Orthogonalbasis $e_1, \ldots, e_n$ mit $h(e_i) > 0$ — der sog. Trägheitsindex — die einzigen Invariante für die Äquivalenz hermitescher Formen. Unter der Signatur verstehen wir dann das Paar $(\nu, n-\nu)$.

2.3 Lokales Verhalten im Fall III ([16] , [18]).

Es ist hier D ein Schiefkörper über K mit einer Involution zweiter Art und k ist der Fixkörper von J|K.

Wenn eine Primstelle $\mathfrak{p}$ von k unzerlegt ist, d.h. wenn $K_{\mathfrak{p}}$ ein Körper ist, so ist bekanntlich ([16] ,Satz 2) $D_{\mathfrak{p}}$ ein voller Matrizenring über $K_{\mathfrak{p}}$; genauer ist

$$D_{\mathfrak{p}} \cong M_m(K_{\mathfrak{p}}), \quad \text{wobei} \quad m^2 = \dim_K D \quad \text{ist.}$$

Setzen wir $A^* = (a^*_{ji})$ für $A = (a_{ij})$ aus $M_m(K_{\mathfrak{p}})$, wobei hier a^*, für $a \in K_{\mathfrak{p}}$, die Konjugierte von a über $k_{\mathfrak{p}}$ bezeichnen möge, so ist offenbar $A \to A^*$ eine Involution von $D_{\mathfrak{p}} = M_m(K_{\mathfrak{p}})$. Der Zusammenhang zwischen dieser und der auf $D_{\mathfrak{p}}$ erweiterten, gegebenen Involution J ist der folgende ([18] ,p.247) :

Es gibt ein invertierbares Element $\delta \in D_{\mathfrak{p}}$ mit $\delta^* = \delta$, so dass

(i) $\qquad \alpha^J = \delta^{-1} \alpha^* \delta \quad$ für alle $\alpha \in D_{\mathfrak{p}}$ gilt.

Für ein bzgl. J symmetrsiches Element $\alpha \in D_{\mathfrak{p}}$ gilt also,

(ii) $\qquad (\delta\alpha)^* = \delta\alpha$.

Als Matrix aufgefasst bedeutet dies, $\delta\alpha$ ist eine (gewöhnliche) hermitesche Matrix in $M_m(K_{\mathfrak{p}})$.

Es sei nun V ein J-hermitescher Raum der Dimension

$n \geqslant 1$ über D. Bezüglich einer Orthogonalbasis $e_1, \ldots, e_n$ habe die hermitesche Form die Diagonalgestalt,

$$h(x) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\xi}_i \alpha_i \xi_i \quad \text{mit } \alpha_i = \bar{\alpha}_i \text{ aus } D^*.$$

Für eine unzerlegte Primstelle $\mathfrak{p}$ von k nennt man die Kästchenmatrix

$$\text{(iii)} \qquad \begin{pmatrix} \delta\alpha_1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & \cdots & \delta\alpha_n \end{pmatrix} \quad \text{aus } M_{mn}(K_\mathfrak{p})$$

die $\mathfrak{p}$-Komponente von h. Sie ist eine gewöhnliche hermitesche Matrix über $K_\mathfrak{p}$, die nicht notwendig in der Diagonalgestalt vorliegt. Die zugehörige hermitesche Form in mn Variablen über $K_\mathfrak{p}$ werde mit $f_\mathfrak{p}$ bezeichnet. Beachtet man die Gleichungen (i),(ii), so ist klar, dass Isometrien von $h_\mathfrak{p}$ und $f_\mathfrak{p}$ sich eineindeutig entsprechen; das heisst, es gilt

$$\text{(2.2)} \qquad U_n(D_\mathfrak{p}, h) \cong U_{mn}(K_\mathfrak{p}, f_\mathfrak{p}).$$

Wir wollen die Beziehung zwischen $h_\mathfrak{p}$ und $f_\mathfrak{p}$ etwas genauer verfolgen. Es seien $\varepsilon_{11}, \ldots, \varepsilon_{mm}$ die üblichen Matrizeneinheiten in $M_m(K_\mathfrak{p})$; wir setzen für $1 \leqslant j \leqslant m$,

$$V_\mathfrak{p}^j = V_\mathfrak{p} \varepsilon_{jj} = \{x \varepsilon_{jj} : x \in V_\mathfrak{p}\}.$$

Jedes $V_\mathfrak{p}^j$ ist ein mn-dimensionaler Vektorraum über $K_\mathfrak{p}$ und man kann $V_\mathfrak{p}$ als die direkte Summe $\bigoplus_{j=1}^{m} V_\mathfrak{p}^j$ auffassen.

Sei nun $x = \sum_{i=1}^{n} e_i \xi_i$ beliebig aus $V_\mathfrak{p}$. Dann ist $\delta \cdot h(x) = \sum \xi_i^* \delta\alpha_i \xi_i$. Setzen wir $\xi_i = (\xi^i_{kl})$ und $\delta \cdot h(x) = (\gamma_{kl})$, als Matrizen in $M_m(K_\mathfrak{p})$, so gilt, wie man sich leicht durch eine koordinatenmässige Rechnung überzeugt,

(iv) $\qquad f(x^i, x^j) = \gamma_{ij}$, wobei $x^i = x\,\varepsilon_{ii} \in K_\mathfrak{p}^{mn}$ bezeichnet.

Auch im vorliegenden Fall gilt das HASSE-Prinzip für die Existenz einer Isometrie eines nicht-ausgearteten Raumes in einen anderen nicht-ausgearteten Raum gleicher oder höherer Dimension. Für eine zerfallende Primstelle bedeutet wiederum die lokale Bedingung gar nichts. Für ein unzerlegtes $\mathfrak{p} \in P_\infty^r(k)$ ist der Trägheitsindex $j_\mathfrak{p}(V)$ der zugehörigen lokalen hermiteschen Form $f_\mathfrak{p}$ über $K_\mathfrak{p}$ — das ist die Anzahl der positiven Eigenwerte der Matrix (iii), oder auch die Anzahl der positiven Formenwerte in einer Orthogonalbasis für $f_\mathfrak{p}$ — die einzige Invariante (neben der Dimension) für Äquivalenz J-hermitescher Formen über $D_\mathfrak{p}$.

Sind V,W zwei nicht-ausgeartete J-hermitesche Räume über D, so ergibt das HASSE-Prinzip das folgende DARSTELLBARKEITSKRITERIUM ([16] , Satz 12)

W ist durch V darstellbar (d.h. es gibt eine Isometrie von W in V)

genau dann, wenn für jede unzerlegte Primstelle $\mathfrak{p} \in P_\infty^r(k)$,

(2.3) $\qquad 0 \leqslant j_{\mathfrak{p}}(V) - j_{\mathfrak{p}}(W) \leqslant m(\dim V - \dim W)$

gilt [1].

2.4 Lokales Verhalten im Fall IV ([17] , [19]).

Über lokalen Körpern gilt der SATZ ([19] ,Thms.1,2):

Es sei $k_{\mathfrak{p}}$ ein lokaler Körper ($\mathfrak{p}$ endlich oder reell unendlich) und $D_{\mathfrak{p}}$ ein Quaternionenschiefkörper über $k_{\mathfrak{p}}$ [2].

Dann ist jeder (nicht-ausgeartete) J-schiefhermitesche Raum über $D_{\mathfrak{p}}$ der Dimension n isotrop, wenn $n \geqslant 4$ für endliches $\mathfrak{p}$ bzw. $n \geqslant 2$ für reell unendliches $\mathfrak{p}$ ist.

Daraus folgt :

(2.4) Jeder J-schiefhermitesche Raum über D der Dimension $n \geqslant 3$ ist universell.

Nun liege der globale Fall IV vor. Für einen Quaternionenschiefkörper sind höchstens endlich viele Primstellen verzweigt; mindestens eine Primstelle ist aber verzweigt ([5] ,pp.116-117). Für eine unverzweigte

---

1) Bei Landherr [16] fehlt (irrtümlich!) der Faktor m.

2) Bekanntlich gibt es über einem lokalen Körper bis auf Isomorphie genau einen Quaternionenschiefkörper ([17] , 61:2, 63:11b).

Primstelle $\mathfrak{p}$ von k, d.h. wenn $D_{\mathfrak{p}}$ Nullteiler enthält, gilt $D_{\mathfrak{p}} \cong M_2(k_{\mathfrak{p}})$, ([15], §57:9).

Für eine unverzweigte Primstelle $\mathfrak{p}$ von k ist die unitäre Gruppe $U_n(V_{\mathfrak{p}})$ isomorph zu einer orthogonalen Gruppe über $k_{\mathfrak{p}}$, wie man folgendermassen sieht (vgl. [18]).

Es seien ε_{11}, ε_{12}, ε_{21}, ε_{22} die Matrizeneinheiten,

$$\varepsilon_{11}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{12}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{21}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}, \quad \varepsilon_{22}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Wie im Fall III setzen wir $V'_{\mathfrak{p}} = V_{\mathfrak{p}} \cdot \varepsilon_{11}$, $V''_{\mathfrak{p}} = V_{\mathfrak{p}} \cdot \varepsilon_{22}$.

Dann sind $V'_{\mathfrak{p}}, V''_{\mathfrak{p}}$ beide 2n-dimensionale $k_{\mathfrak{p}}$-Vektorräume derart, dass über $k_{\mathfrak{p}}$ gilt :

(i) $$V_{\mathfrak{p}} = V'_{\mathfrak{p}} + V''_{\mathfrak{p}} .$$

Durch $\varphi(x') = x'\varepsilon_{12}$ wird dann ein $k_{\mathfrak{p}}$-Isomorphismus $\varphi : V'_{\mathfrak{p}} \to V''_{\mathfrak{p}}$ gegeben.

Sind umgekehrt $V'_{\mathfrak{p}}$, $V''_{\mathfrak{p}}$ zwei 2n-dimensionale $k_{\mathfrak{p}}$-Vektorräume und $\varphi : V'_{\mathfrak{p}} \to V''_{\mathfrak{p}}$ ein $k_{\mathfrak{p}}$-Isomorphismus, so erkläre man $V_{\mathfrak{p}}$ durch (i) und darauf eine Rechtsmultiplikation durch Elemente aus $D_{\mathfrak{p}}$ vermöge den folgenden Festsetzungen :

für $x = x' + x''$, $y = y' + y''$ mit $x', y' \in V'_{\mathfrak{p}}$; $x'', y'' \in V''_{\mathfrak{p}}$, sei

(ii) $$\begin{aligned} x\,\varepsilon_{11} &= x', & x\,\varepsilon_{12} &= \varphi(x'),\\ x\,\varepsilon_{22} &= x'', & x\,\varepsilon_{21} &= \varphi^{-1}(x''), \end{aligned}$$

Dadurch wird $V_{\mathfrak{p}}$ ein n-dimensionaler $D_{\mathfrak{p}}$-Rechtsmodul.

Ist $e'_1,\dots, e'_{2n}$ eine $k_\mathfrak{p}$-Basis von $V'_\mathfrak{p}$, so ist $e_1,\dots, e_n$ mit $e_i = e'_{2i-1} + \varphi(e'_{2i})$ eine $D_\mathfrak{p}$-Basis von $V_\mathfrak{p}$ und umgekehrt. Ist $(\xi_{ij}) \in M_n(D_\mathfrak{p})$ die Matrix einer linearen Transformation u von $V_\mathfrak{p}$ bzgl. der Basis $e_1,\dots, e_n$, so ist sie als Element von $M_{2n}(k_\mathfrak{p})$ aufgefasst, die Matrix von $u' = u|V'_\mathfrak{p}$ bzgl. der Basis $e'_1,\dots, e'_{2n}$.

Für $D_\mathfrak{p} \cong M_2(k_\mathfrak{p})$ ist $\alpha + \alpha^J$ gerade die Matrizenspur von α. Wegen $h(x)^J = -h(x)$ kann man also ansetzen,

(iii)
$$h_\mathfrak{p}(x) = \begin{pmatrix} q_\mathfrak{p}(x) & q''_\mathfrak{p}(x) \\ q'_\mathfrak{p}(x) & -q_\mathfrak{p}(x) \end{pmatrix}, \quad \text{bzw.}$$

$$h_\mathfrak{p}(x,y) = \begin{pmatrix} B_1^\mathfrak{p}(x,y) & \frac{1}{2} B''_\mathfrak{p}(x,y) \\ \frac{1}{2} B'_\mathfrak{p}(x,y) & -B_2^\mathfrak{p}(x,y) \end{pmatrix}$$

für alle $x,y \in V_\mathfrak{p}$.

Dann sind $q_\mathfrak{p}$, $q'_\mathfrak{p}$, $q''_\mathfrak{p}$ quadratische Formen und $B_1^\mathfrak{p} - B_2^\mathfrak{p}$, $B'_\mathfrak{p}$ bzw. $B''_\mathfrak{p}$ die zugehörigen symmetrischen Bilinearformen. Sie erfüllen die Gleichungen :

(iv)
$$\begin{aligned} q'_\mathfrak{p}(x) &= q'_\mathfrak{p}(x'), \qquad q''_\mathfrak{p}(x) = q''_\mathfrak{p}(x''), \\ q'_\mathfrak{p}(x''\varepsilon_{21}) &= -q''_\mathfrak{p}(x''), \quad q''_\mathfrak{p}(x'\varepsilon_{12}) = -q'_\mathfrak{p}(x'), \\ q_\mathfrak{p}(x) &= -\tfrac{1}{2} B'_\mathfrak{p}(x', x''\varepsilon_{21}), \\ B_1^\mathfrak{p}(x,y) &= -B_2^\mathfrak{p}(y,x) = -\tfrac{1}{2} B'_\mathfrak{p}(y', x''\varepsilon_{21}). \end{aligned}$$

$h_\mathfrak{p}$ ist durch irgendeine der Formen $q_\mathfrak{p}$, $q'_\mathfrak{p}$, $q''_\mathfrak{p}$ eindeutig bestimmt. Ist umgekehrt $q'_\mathfrak{p} : V'_\mathfrak{p} \to k_\mathfrak{p}$ eine gegebene quadratische Form, so definiere man $B_1^\mathfrak{p}, B_2^\mathfrak{p}$, $q_\mathfrak{p}$, $q''_\mathfrak{p}$ durch die Gleichungen (iv) und alsdann $h_\mathfrak{p}$ durch (iii); dann ist $h_\mathfrak{p}$ eine J-schiefhermitesche Form auf $V_\mathfrak{p}$.

J-schiefhermitesche Formen auf $V_\mathfrak{p}$ über $D_\mathfrak{p}$ und quadratische Formen $q'_\mathfrak{p}$ auf $V'_\mathfrak{p}$ über $k_\mathfrak{p}$ entsprechen sich also eineindeutig. Ferner sieht man, dass eine $k_\mathfrak{p}$-lineare Transformation u von $V_\mathfrak{p}$ genau dann eine Isometrie des schiefhermiteschen Raumes $V_\mathfrak{p}$ ist, wenn u die Zerlegung (i) invariant lässt, $u''\varphi = \varphi u'$, wobei $u' = u|V'_\mathfrak{p}$ und $u'' = u|V''_\mathfrak{p}$ ist, erfüllt und wenn u' eine Isometrie des quadratischen Raumes $(V'_\mathfrak{p}, q'_\mathfrak{p})$ ist. Somit gilt :

$$U_n(D_\mathfrak{p}, h_\mathfrak{p}) \cong O_{2n}(k_\mathfrak{p}, q'_\mathfrak{p}). \tag{2.5}$$

Das HASSE-Prinzip gilt im vorliegenden Fall nur im beschränktem Umfang; siehe darüber die demnächst erscheinende Vorlesungausarbeitung [14] von M.Kneser. Das Hasse-Prinzip für Isotropie (Darstellung der Null) gilt nicht für $n = 2$; folglich gilt das Hasse-Prinzip für die Isometrie zweier Räume für k e i n e Dimension. Für $n \neq 2$ gilt das Hasse-Prinzip für Isotropie, wobei im Lokalen überall dort, wo $D_\mathfrak{p}$ zerfällt (also $\mathfrak{p}$ unverzweigt ist), die Bedingung schärfer so lauten muss,

dass $h(x_\mathfrak{p}) = 0$ gilt, mit einem Vektor $x_\mathfrak{p} \in V_\mathfrak{p}$, der mindestens eine in $D_\mathfrak{p}$ invertierbare Komponente hat [1].

Demgegenüber gilt das HASSE-Prinzip für echte Einbettungen [14], das heisst für die Existenz einer Isometrie eines (nicht-ausgearteten) J-schiefhermiteschen Raumes in einen höher dimensionalen (nicht-ausgearteten) J-schiefhermiteschen Raum. Speziell gilt also :

Sei W ein nicht-ausgearteter Teilraum der Dimension ≥ 2. W stellt einen Wert $\alpha \in h(V)^*$ dar genau dann, wenn jedes $W_\mathfrak{p}$ den Wert α darstellt.

Beachtet man (2.4),(iv) und die Tatsache, dass jede quadratische Form über einem lokalen Körper $k_\mathfrak{p}$ ($\mathfrak{p}$ endlich) in mehr als 4 Variablen isotrop ist, so ist klar, dass die obige lokale Bedingung erfüllt ist, für alle endlichen, komplex unendlichen und für alle verzweigten, reell unendlichen Primstellen $\mathfrak{p}$ von k, wenn

(2.6) $\qquad \dim W \geq 3$ ist.

---

[1] Ein mangelhafter Beweis dafür befindet sich bei Hijikata [11], wo er die schärfere Forderung im Lokalen zwar nicht voraussetzt, wohl aber im Beweis stillschweigend ausnutzt (vgl. die Besprechung von T.A. Springer in Math.Reviews 27 (1964)).

§ 3. Erzeugung von $U_n(V)$ durch spezielle Isometrien

In diesem Paragraphen beweisen wir den in der Einleitung erwähnten Satz 1, der eine entscheidende Rolle spielt und dessen Beweis sich naturgemäss auf lokale Betrachtungen stützt. In §3.1 treffen wir einige Vorbereitungen zum Satz 1, so zum Beispiel die Ausgestaltung (3.1) des HASSE-Prinzips. Der Übersichtlichkeit halber nehmen wir ferner einen Teil des Beweises von Satz 1 als Lemma 3 vorweg.

3.1 Vorbereitungen zum Satz 1.

Es ist zweckmässig zwei der Einheitlichkeit dienende Bezeichnungen einzuführen.

Im Fall II bezeichne $f_\mathfrak{p}$, für eine unzerlegte Primstelle $\mathfrak{p}$, die zu $h_\mathfrak{p}$ gehörige hermitesche Form über $K_\mathfrak{P}$ (§2.3); im Fall IV bezeichne $f_\mathfrak{p}$, für eine unverzweigte Primstelle $\mathfrak{p}$, die zu $h_\mathfrak{p}$ gehörige, in § 2.4 mit $q'_\mathfrak{p}$ bezeichnete, quadratische Form über $k_\mathfrak{p}$. Im Fall I,II werde

dagegen unter $f_{\mathfrak{p}}$, für beliebiges $\mathfrak{p}$, $h_{\mathfrak{p}}$ verstanden.

Für einen nicht-ausgearteten Teilraum W von V werde die zu $W_{\mathfrak{p}}, \mathfrak{p}$ entsprechend, gehörige lokale Form mit $f_{\mathfrak{p}}|W$ bezeichnet.

Wir sagen " $\mathfrak{p}$ sei kritisch bezüglich V ", wenn $\mathfrak{p}$ reell unendlich und im

Fall I, III unzerlegt, bzw. im

Fall II verzweigt, bzw. im

Fall IV unverzweigt ist

und wenn f i s o t r o p ist.

Wir b e h a u p t e n nun :

Es sei W ein nicht-ausgearteter Teilraum der Dimension $r \geq 2$; im Fall IV werde $r \geq 3$ vorausgesetzt. Setze $S = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p}$ kritisch bezüglich $V\}$. Dann gilt :

(3.1) $\alpha \in h(V)^*$ wird genau dann in W dargestellt, wenn jeder der Räume $W_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in S$, α darstellt.

Beweis. Zu zeigen ist, auf Grund von (2.1),(2.3),(2.6) nur, dass für jede reell unendliche unzerlegte bzw. verzweigte bzw. unverzweigte Primstelle $\mathfrak{p} \notin S$, $W_{\mathfrak{p}}$ automatisch α darstellt. Für ein solches $\mathfrak{p}$ ist also $f_{\mathfrak{p}}$ anisotrop, also positiv oder negativ definit.

Im Fall I oder II ist dann $W_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls positiv oder negativ definit; also ist $W_{\mathfrak{p}}$ universell in $V_{\mathfrak{p}}$.

Im Fall III gilt dann für jeden anisotropen Vektor $a \in V$, $j_{\mathfrak{p}}(a) = 0$ bzw. m, je nach dem ob $f_{\mathfrak{p}}$ negativ bzw.

positiv definit ist; denn $0 < j_{\mathfrak{p}}(a) < m$ kann genau für eine indefinite Form $f_{\mathfrak{p}}|\langle a\rangle$ vorkommen. Dann gilt auch $j_{\mathfrak{p}}(W) = 0$ bzw. mr; nach (2.3) wird also $h(a)$ in $W_{\mathfrak{p}}$ dargestellt.

Im Fall IV ist dann $f_{\mathfrak{p}}|W$ positiv oder negativ definit, je nach dem ob $f_{\mathfrak{p}}$ positiv oder negativ definit ist; das heisst, $f_{\mathfrak{p}}|W$ ist universell bzgl. $f_{\mathfrak{p}}$. Dann ist auch $h_{\mathfrak{p}}|W$ universell in $V_{\mathfrak{p}}$.

Bemerkung. Im Fall I,II ist die lokale Bedingung für ein $\mathfrak{p}\in S$, wo $W_{\mathfrak{p}}$ isotrop ist, von vornherein erfüllt.

Den Ergebnissen in Dieudonné [6], chap.II, §§ 4,5,9 (man beachte, dass Dieudonné h als schiefhermitesch voraussetzt; somit entspricht unser Fall II dem dortigen Typ I) entnehmen wir folgendes :

Sei $n \geqslant 3$; für eine bezüglich V kritische Primstelle $\mathfrak{p}$ von k gilt dann im

Fall I, $U_n'(V_{\mathfrak{p}}) = U_n^+(V_{\mathfrak{p}})$ ist fasteinfach;

Fall II, $U_n'(V_{\mathfrak{p}}) = U_n(V_{\mathfrak{p}})$ ist fasteinfach;

Fall III, $U_n'(V_{\mathfrak{p}}) \cong U_{mn}'(K_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}) = U_{mn}^+$ ist fasteinfach;

Fall IV, $U_n'(V_{\mathfrak{p}}) \cong \Omega_{2n}(k_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}) = O_{2n}'$ ist fasteinfach.

Beachtet man diese Beziehungen, so ist die folgende

B e h a u p t u n g klar :

Es sei $n \geqslant 3$; W sei ein (nicht-ausgearteter) Teilraum der Dimension $r \geqslant 2$. Sei $\mathfrak{p}$ eine bezüglich V kritische Primstelle von k; im Fall IV sei ferner $f_{\mathfrak{p}}|W$ isotrop.

Dann gilt

$$U_n(V_{\mathfrak{p}}) = U_n'(V_{\mathfrak{p}}) \cdot U_r(W_{\mathfrak{p}}). \tag{3.2}$$

Beweis. Man kann offenbar $u_{\mathfrak{p}} \in U_n(V_{\mathfrak{p}})$ um eine Isometrie $t_{\mathfrak{p}} \in U_r(W_{\mathfrak{p}})$ so abändern, dass $u_{\mathfrak{p}} t_{\mathfrak{p}}$ als Isometrie der lokalen Form $f_{\mathfrak{p}}$ aufgefasst, im Fall I,II oder III die Determinante 1 hat, also in $U_n'(V_{\mathfrak{p}})$ liegt. Da im Fall IV $f_{\mathfrak{p}}|W$ isotrop sein soll, ist die Spinornorm zu $f_{\mathfrak{p}}|W$ ebenfalls surjektiv. Es gibt also (Bezeichnung wie in §2.4) ein $t_{\mathfrak{p}}' \in U_r(W_{\mathfrak{p}})$ mit $\theta(t_{\mathfrak{p}}') = \theta(u_{\mathfrak{p}}')^{-1}$. Dann liegt $u_{\mathfrak{p}}' t_{\mathfrak{p}}'$ in $O_{2n}'(k_{\mathfrak{p}}, f_{\mathfrak{p}}) = \Omega_{2n}$, also $u_{\mathfrak{p}} t_{\mathfrak{p}}$ in $U_n'(V_{\mathfrak{p}})$.

LEMMA 2.

Es sei $n \geqslant 3$; $a \in V$ sei ein anisotroper Vektor. Setze $S = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p}$ kritisch bezüglich $V\}$. Im Fall IV sei $f_{\mathfrak{p}}|\langle a\rangle^{\perp}$ isotrop, für jedes $\mathfrak{p} \in S$.
Für jedes $\mathfrak{p} \in S$ sei eine Isometrie $v_{\mathfrak{p}} \in U_n(V_{\mathfrak{p}})$ gegeben.

Dann gibt es einen Vektor $x \in V$ mit $h(x) = h(a)$, der sich $\mathfrak{p}$-adisch beliebig wenig von $x_{\mathfrak{p}} = v_{\mathfrak{p}}(a)$ unterscheidet, für alle $\mathfrak{p} \in S$.

Beweis. Wegen (3.2) dürfen wir $v_{\mathfrak{p}} \in U_n'(V_{\mathfrak{p}})$ annehmen,

ohne dass dabei $x_\mathfrak{p}$ sich ändert. Diese $v_\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p} \in S$, approximieren wir nach dem schwachen Approximationssatz durch eine Isometrie $v \in U_n'(V)$ genügend gut. Für $x = v(a)$ wird dann $|x - x_\mathfrak{p}|_\mathfrak{p} = |v(a) - v_\mathfrak{p}(a)|_\mathfrak{p}$

$$\leq n \, \|v - v_\mathfrak{p}\|_\mathfrak{p} |a|_\mathfrak{p} \quad ([17], p.286),$$

also beliebig klein, für alle $\mathfrak{p} \in S$.

LEMMA 3.

Es sei $n \geq 3$; V sei anisotrop und W sei ein Teilraum der Dimension $r \geq 2$. Setze $S = \{\mathfrak{p}: \mathfrak{p}$ kritisch bzgl. $V\}$; im Fall IV sei $f_\mathfrak{p}|W$ isotrop für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Es seien $x \in W^\perp$ und $y \in V$ anisotrope Vektoren mit $h(x) = h(y)$.

Es seien gegeben Vektorenfolgen $(x_i^\mathfrak{p})_{\mathfrak{p} \in S}$, $0 \leq i \leq l$, mit $x_0^\mathfrak{p} = x$, $x_l^\mathfrak{p} = y$ und $x_{i-1}^\mathfrak{p} \neq x_i^\mathfrak{p}$ für alle $\mathfrak{p} \in S$ und $1 \leq i \leq l$; es gelte $x_i^\mathfrak{p} = s_{b_i^\mathfrak{p}}^{\lambda_i^\mathfrak{p}}(x_{i-1}^\mathfrak{p})$ mit einer Spiegelung (im Sinne von §2.1) $s_{b_i^\mathfrak{p}}^{\lambda_i^\mathfrak{p}}$ aus $U_n(V_\mathfrak{p})$.

Dann gibt es Vektoren $x_0 = x, x, \ldots, x_l = y$ aus V mit $h(x_i) = h(x)$, $x_{i-1} \neq x_i$ für $1 \leq i \leq l$ und Elemente $\eta_i \in \dot{D}$, derart dass $h(b_i)$, wobei $b_i = (x_i - x_{i-1})\eta_i^{-1}$ sei, sich $\mathfrak{p}$-adisch beliebig wenig von $h(b_i^\mathfrak{p})$ unterscheidet, für alle $\mathfrak{p} \in S$ und $1 \leq i \leq l$.

Beweis. 1. Zunächst eine Vorbetrachtung. Ist D ein endlich dimensionaler Vektorraum über k, so definiert jede

Primstelle $\mathfrak{p}$ von k eine Topologie auf D, etwa auf die folgende Weise. Man wähle eine Basis (ξ_i) von D über k und setze für $\xi = \sum_i \alpha_i \xi_i$ aus D $(\alpha_i \in k)$,

$|\xi|_{\mathfrak{p}} = \max_i |\alpha_i|_{\mathfrak{p}}$. Dadurch wird eine Norm auf D, ebenso auf $D_{\mathfrak{p}} = D \underset{k}{\otimes} k_{\mathfrak{p}}$ definiert.

Sei nun D sogar eine Algebra mit einer Involution J. Wir <u>behaupten</u> :

J ist gleichmässig stetig auf $D_{\mathfrak{p}}$.

Zur Begründung beachten wir, dass mit (ξ_i) auch $(\bar{\xi}_i)$ eine Basis von D über k ist. Die auf die Basis (ξ_i) bzw. $(\bar{\xi}_i)$ bezogene Norm auf $D_{\mathfrak{p}}$ werde mit $|\ |_{\mathfrak{p}}$ bzw. $|\ |'_{\mathfrak{p}}$ bezeichnet. Zu zeigen : ist $\varepsilon > 0$ gegeben, so existiert ein $\delta > 0$, so dass aus $|\alpha - \beta|_{\mathfrak{p}} < \delta$ für $\alpha, \beta \in D_{\mathfrak{p}}$ stets $|\bar{\alpha} - \bar{\beta}|_{\mathfrak{p}} < \varepsilon$ folgt.

Sei $\alpha - \beta = \sum a_i \xi_i$, $a_i \in k_{\mathfrak{p}}$, also $\bar{\alpha} - \bar{\beta} = \sum a_i \bar{\xi}_i$. Folglich gilt, $|\alpha - \beta|_{\mathfrak{p}} = |\bar{\alpha} - \bar{\beta}|'_{\mathfrak{p}}$. Es gilt aber ([17] ,p.287)

$$\frac{|\bar{\alpha} - \bar{\beta}|_{\mathfrak{p}}}{d\, \|(a_{ij})\|_{\mathfrak{p}}} \leqslant |\bar{\alpha} - \bar{\beta}|'_{\mathfrak{p}} ,$$

wobei $d = \dim_k D$ ist und $\|(a_{ij})\|_{\mathfrak{p}} = \max_{i,j} |a_{ij}|_{\mathfrak{p}}$ die Norm der Transformationsmatrix beim Basiswechsel,

$$(\bar{\xi}_j) = (a_{ij})(\xi_i), \quad \text{bezeichnet.}$$

Wählen wir $\delta = \dfrac{\varepsilon}{d\, \|(a_{ij})\|_{\mathfrak{p}}}$, so wird

$|\bar{\alpha}-\bar{\beta}|_{\mathfrak{P}} \leq |\alpha-\beta|_{\mathfrak{P}} \cdot d\,\|(a_{ij})\|_{\mathfrak{P}} < \varepsilon$, wenn $|\alpha-\beta|_{\mathfrak{P}} < \delta$ gilt.

2. Nun zum eigentlichen Beweis! Es ist $x_i^{\mathfrak{P}} - x_{i-1}^{\mathfrak{P}} = b_i^{\mathfrak{P}} \eta_i^{\mathfrak{P}}$ mit $\eta_i^{\mathfrak{P}} = (\lambda_i^{\mathfrak{P}} - 1) h(b_i^{\mathfrak{P}})^{-1} h(b_i^{\mathfrak{P}}, x_{i-1}^{\mathfrak{P}}) \neq 0$ aus $D_{\mathfrak{P}}$ (im Fall III oder IV aber möglicherweise Nullteiler) und $h(x_i^{\mathfrak{P}}) = h(x)$ für alle i und $\mathfrak{P}$.

Wir approximieren jede der Folgen $(x_i^{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in S}$, $1 \leq i \leq l-1$, nach Lemma 2 (man beachte, dass $x_i^{\mathfrak{P}} = v_i^{\mathfrak{P}}(x)$ gilt, mit $v_i^{\mathfrak{P}} = s_{b_i^{\mathfrak{P}}} \ldots s_{b_1^{\mathfrak{P}}}$) durch einen Vektor $x_i \in V$ mit $h(x_i) = h(x)$, genügend gut. Wegen $x_i^{\mathfrak{P}} \neq x_{i-1}^{\mathfrak{P}}$, können wir dabei erreichen, dass $x_i \neq x_{i-1}$ gilt, für $1 \leq i \leq l$ (mit $x_0 = x$, $x_l = y$).

Ferner approximieren wir jede der Folgen $(\eta_i^{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in S}$, $1 \leq i \leq l$, durch ein Element $\eta_i \in D^*$ genügend gut (indem wir die Koordinaten von $\eta_i^{\mathfrak{P}}$ bzgl einer Basis von D über k durch Zahlen aus k approximieren und diese dann zu einem Vektor $\eta_i \in D^*$ zusammenfassen).

Setzen wir nun $b_i^{\mathfrak{P}} = (x_i - x_{i-1}) \eta_i^{-1}$, so ist klar, dass bei genügend guter Näherung $h(b_i)$ $\mathfrak{P}$-adisch beliebig nahe an $h(b_i^{\mathfrak{P}})$ liegen wird, für jedes $\mathfrak{P} \in S$ und $1 \leq i \leq l$. Streng genommen sieht man dies aus der folgenden Abschätzung :

$$
\begin{aligned}
&|h(b_i) - h(b_i^{\mathfrak{P}})|_{\mathfrak{P}} \\
&= \Big| \bar{\eta}_i^{-1} h(x_i - x_{i-1}) \eta_i^{-1} - \bar{\eta}_i^{-1} h(x_i^{\mathfrak{P}} - x_{i-1}^{\mathfrak{P}}) \eta_i^{-1} + \\
&\quad + \bar{\eta}_i^{-1} \bar{\eta}_i^{\mathfrak{P}} h(b_i^{\mathfrak{P}}) \eta_i^{\mathfrak{P}} \eta_i^{-1} - h(b_i^{\mathfrak{P}}) \eta_i^{\mathfrak{P}} \eta_i^{-1} + h(b_i^{\mathfrak{P}}) \eta_i^{\mathfrak{P}} \eta_i^{-1} - h(b_i^{\mathfrak{P}}) \Big|_{\mathfrak{P}}
\end{aligned}
$$

$$\leq \left|\bar{\eta}_i^{-1}\right|_{\mathfrak{p}} \cdot \left|h(x_i - x_{i-1}) - h(x_i^{\mathfrak{P}} - x_{i-1}^{\mathfrak{P}})\right|_{\mathfrak{P}} \cdot \left|\eta_i^{-1}\right|_{\mathfrak{P}} +$$

$$+ \left|\bar{\eta}_i^{-1}\,\bar{\eta}_i^{\mathfrak{P}} - 1\right|_{\mathfrak{p}} \cdot \left|h(b_i^{\mathfrak{P}})\right|_{\mathfrak{p}} \left|\eta_i^{\mathfrak{P}}\eta_i^{-1}\right|_{\mathfrak{P}} + \left|h(b_i^{\mathfrak{P}})\right|_{\mathfrak{p}} \left|\eta_i^{\mathfrak{P}}\eta_i^{-1} - 1\right|_{\mathfrak{p}} .$$

Bei hinreichend guter Approximation werden, aus Stetigkeitsgründen $\left|h(x_i - x_{i-1}) - h(x_i^{\mathfrak{P}} - x_{i-1}^{\mathfrak{P}})\right|_{\mathfrak{P}}$, $\left|\eta_i^{\mathfrak{P}}\eta_i^{-1} - 1\right|_{\mathfrak{P}}$, und $\left|\bar{\eta}_i^{-1}\bar{\eta}_i^{\mathfrak{P}} - 1\right|_{\mathfrak{p}}$ beliebig klein für alle $\mathfrak{P} \in S$, während die anderen Faktoren rechts beschränkt bleiben.

Damit ist das Lemma bewiesen.

Nun sind wir in der Lage, den angekündigten Satz 1 beweisen zu können.

3.2 Beweis von Satz 1.

SATZ 1.

Es sei $n \geq 4$ im Fall IV, $n \geq 3$ sonst. V sei anisotrop; W sei ein Teilraum der Dimension $r \geq 2$; im Fall IV sei sogar $r \geq 3$. Setze $S = \{\mathfrak{P} : \mathfrak{p}$ kritisch bzgl. $V\}$. Im Fall IV sei $f_{\mathfrak{p}}|W$ isotrop, für jedes $\mathfrak{P} \in S$.

Dann wird $U_n(V)$ erzeugt von allen Spiegelungen s_a, derart dass W den Wert $h(a)$ darstellt.

Beweis. 1. Setze $t = n-r$. Ist $t=0$ oder $S=\emptyset$, so ist die Behauptung trivial (vgl.(3.1). Wir setzen also $t > 0$ und

und $S \neq \emptyset$ voraus. Es sei $V = W_0 \supset W_1 \ldots \supset W_t = W$ eine absteigende Kette von Teilräumen von V, so daß gilt,

$$W_{i-1} = W_i \perp \langle a_i \rangle, \quad 1 \leq i \leq t,$$

mit einem anisotropen Vektor a_i. Es bezeichne G die von den Spiegelungen der erwähnten Art erzeugte Untergruppe von $U_n(V)$. Wir führen eine absteigend rekursive Konstruktion durch.

Setze $x = a_1$; wir b e h a u p t e n :

zu jedem $u \in U_n$ gibt es eine Isometrie $v_1 \in G$ mit $v_1(x) = u(x)$. (Dann ist $v_1^{-1}u$ als Isometrie von W_1 auffassbar.) Zum Beweis dürfen wir $u(x) \neq x$ annehmen. Wir zeigen : es gibt endlich viele Vektoren

$$x_0 = x, \; x_1, \; \ldots, \; x_{l-1}, \; x_l = u(x), \; l \geq 1, \quad \text{in } V,$$

derart dass $h(x_i) = h(x)$, $x_i \neq x_{i-1}$ für alle $1 \leq i \leq l$ gilt und dass W jeden Wert $h(x_i - x_{i-1})$ darstellt. Dann gilt (nach (1.3))

$$\lambda_i s_{b_i}(x_{i-1}) = x_i \quad (1 \leq i \leq l)$$

mit einem gewissen $\lambda_i \in D^*$ und dem in W darstellbaren Vektor $b_i = x_i - x_{i-1}$. Es ist also $s_{b_i} \in G$; für die Isometrie $v_1 = s_{b_1} \ldots s_{b_1}$ aus G gilt dann ersichtlich

$$v_1(x) = x_l = u(x).$$

Im nächsten Schritt werden die Vektoren x_i konstruiert.

2. Sei $\mathfrak{P} \in S$ beliebig, aber für den Augenblick fest. Betrachte die von den Kommutatoren aller Spiegelungen $s_{b_\mathfrak{P}}$, für die $h(b_\mathfrak{P})$ in $W_\mathfrak{P}$ dargestellt wird ($b_\mathfrak{P} \in V_\mathfrak{P}$), erzeugte Untergruppe von $U_n'(V_\mathfrak{P})$. Sie ist, wegen (1.2), ein Normalteiler und gewiss nicht im Zentrum enthalten, denn sie umfasst ja die Gruppe $U_r'(W)$. Wegen der Fasteinfachheit von $U_n'(V_\mathfrak{P})$ — siehe die Zitate auf p. 31 — stimmt also die fragliche Untergruppe mit $U_n'(V_\mathfrak{P})$ überein.

Wir ändern u um eine Isometrie $t_\mathfrak{P} \in U_r(W_\mathfrak{P})$ so ab, dass $w_\mathfrak{P} = ut_\mathfrak{P}$ in $U_n'(V_\mathfrak{P})$ liegt (vgl. (3.2)). Das tun wir für jedes $\mathfrak{P} \in S$. Für jede der Isometrien $w_\mathfrak{P}$, $\mathfrak{P} \in S$, gibt es also nach der obigen Überlegung, eine Darstellung

$$w_\mathfrak{P} = s_{b_1^\mathfrak{P}} \cdots s_{b_1^\mathfrak{P}},$$

als Produkt von Spiegelungen $s_{b_i^\mathfrak{P}}^{\lambda_i^\mathfrak{P}} \in U_n(V_\mathfrak{P})$, derart dass $h(b_i^\mathfrak{P})$ in $W_\mathfrak{P}$ dargestellt wird, für alle $1 \leqslant i \leqslant l$.

Setzen wir $x_0^\mathfrak{P} = x$, $x_i^\mathfrak{P} = s_{b_i^\mathfrak{P}}(x_{i-1}^\mathfrak{P})$ für alle $\mathfrak{P} \in S$ und $1 \leqslant i \leqslant l$, so ist stets $x_l^\mathfrak{P} = w_\mathfrak{P}(x)$. Man beachte, daß $y = w_\mathfrak{P}(x)$ nicht von $\mathfrak{P}$ abhängt; genauer ist $y \in V$, da $t_\mathfrak{P}(x) = x$ gewählt worden war.

Wir dürfen zunächst annehmen, dass $x_{i-1}^\mathfrak{P} \neq x_i^\mathfrak{P}$ für alle $\mathfrak{P} \in S$ und $1 \leqslant i \leqslant l$ gilt. Sonst lassen wir überflüssige Vektoren fort; nach neuer Numerierung gilt dann weiterhin $x_i^\mathfrak{P} = s_{b_i^\mathfrak{P}}(x_{i-1}^\mathfrak{P})$. Sodann b e h a u p t e n wir :

Man kann die Anzahl l, die durchaus von $\mathfrak{P}$ abhängen

kann, für alle $\mathfrak{p} \in S$ gleich wählen, ohne dass dabei eine der Nebenbedingungen — $x_{i-1}^{\mathfrak{p}} \neq x_i^{\mathfrak{p}}$, $x_1^{\mathfrak{p}} = y$, $x_i^{\mathfrak{p}} = s_{b_i^{\mathfrak{p}}}(x_{i-1}^{\mathfrak{p}})$ mit einem in $W_{\mathfrak{p}}$ darstellbaren Vektor $b_i^{\mathfrak{p}}$ — verletzt wird. Ist $l_0 = \max_{\mathfrak{p} \in S} l(\mathfrak{p})$, so verlängere man jede der Folgen $(x_i^{\mathfrak{p}})_i$ um $2l'$ Glieder, wobei $l' = \left[\frac{1}{2}(l_0 - l(\mathfrak{p}))\right]$ sei, auf folgende Weise :

$$x_0^{\mathfrak{p}}, \ldots, x_1^{\mathfrak{p}}, x_{1-1}^{\mathfrak{p}}, \ldots, x_{1-l'+1}^{\mathfrak{p}}, x_{1-l'}^{\mathfrak{p}}, x_{1-l'+1}^{\mathfrak{p}}, \ldots, x_1^{\mathfrak{p}}.$$

Es ist also $2l' + 1 = l_0$ bzw. $l_0 - 1$, wenn $l_0 - 1$ gerade bzw. ungerade ist. Es handelt sich nun darum, die Folgen mit l_0 Gliedern (!) noch um einen Vektor so zu verlängern, dass alle Nebenbedingungen erfüllt werden. Dazu zeigen wir zunächst :

Zu jedem zulässigen Vektor gibt es unendlich viele verschiedene Spiegelungsfaktoren.

Im Fall I,II bzw. III ist dies klar; denn jedes $\mu \in D$ bzw. K mit $\bar{\mu}\mu = 1$ ist ein Spiegelungsfaktor zu jedem zulässigen Vektor. Im Fall IV können wir dies in der vorliegenden Situation (also lokal) wie folgt einsehen. Wir zeigen : es gibt sogar beliebig viele $\mu \in D_{\mathfrak{p}}^*$ mit $\mu\alpha = \alpha\mu$ und $\bar{\mu}\mu = 1$, wobei $\alpha = h(a) \in D_{\mathfrak{p}}^*$ sei.
Es werde gesetzt $D = (\omega_1, \omega_2)_k$ und $\alpha = a_1\omega_1 + a_2\omega_2 + a_3\omega_3$, $\mu = m_0 + m_1\omega_1 + m_2\omega_2 + m_3\omega_3$. Dann ist $\mu\alpha = \alpha\mu$ gleichwertig mit $a_1 : a_2 : a_3 = m_1 : m_2 : m_3$.

Über $k_{\mathfrak{p}} \cong \mathbb{R}$ ist $D_{\mathfrak{p}} \cong (1,-1)$; wir dürfen also über $\mathbb{R}$

$\omega_1^2 = -1$, $\omega_2^2 = +1$ setzen. Es ist dann $\bar{\alpha}\alpha = a_1^2 - a_2^2 - a_3^2 \neq 0$. Sei etwa $a_1 \neq 0$. Ist $\bar{\alpha}\alpha < 0$, so wähle man $m_1 \in \mathbb{R}^*$ beliebig und bestimme m_2, m_3 durch $m_1 : m_2 : m_3 = a_1 : a_2 : a_3$. Dann bestimmt sich m_0 aus der Gleichung

$$\bar{\mu}\mu = m_0^2 + \frac{m_1^2}{a_1^2}(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) = 1$$

Ist aber $\bar{\alpha}\alpha > 0$, so wähle man m_1 so klein, dass

$$a_1^2/m_1^2 \geqslant (a_1^2 - a_2^2 - a_3^2)$$ ausfällt; dann ist $m_0^2 \geqslant 0$ in der Bedingungsgleichung $\bar{\mu}\mu = 1$, also ist m_0 existent. Man hat nur den Wert $m_0 = 1$ auszuschliessen, damit auch noch $1-\mu$ invertierbar wird.

Nun zurück zur Sache! Es war $\lambda_1^{\mathfrak{P}} s_{b_1^{\mathfrak{P}}}(x_{1-1}^{\mathfrak{P}}) = x_1^{\mathfrak{P}} \neq x_{1-1}^{\mathfrak{P}}$.

Da unendlich viele Spiegelungsfaktoren zur Verfügung stehen, gibt es sicher einen Spiegelungsfaktor $\mu_{\mathfrak{P}} \in D_{\mathfrak{P}}^*$, derart dass ${}^{\mu_{\mathfrak{P}}}s_{b_1^{\mathfrak{P}}}(x_{1-1}^{\mathfrak{P}}) = \hat{x}_1^{\mathfrak{P}}$ von $x_{1-1}^{\mathfrak{P}}$ und $x_1^{\mathfrak{P}}$ verschieden ausfällt. Wir streichen das (vorläufig) letzte Glied $x_1^{\mathfrak{P}}$ und nehmen $\hat{x}_1^{\mathfrak{P}}$, $x_1^{\mathfrak{P}}$ hinzu. Wegen

$$\lambda_1^{\mathfrak{P}} \mu_{\mathfrak{P}}^{-1} s_{b_1^{\mathfrak{P}}}(\hat{x}_1^{\mathfrak{P}}) = \lambda_1^{\mathfrak{P}} s_{b_1^{\mathfrak{P}}} \mu_{\mathfrak{P}} s_{b_1}^{-1}(\hat{x}_1^{\mathfrak{P}}) = \lambda_1^{\mathfrak{P}} s_{b_1^{\mathfrak{P}}}(x_{1-1}^{\mathfrak{P}}) = x_1^{\mathfrak{P}}$$

und $x_{1-1}^{\mathfrak{P}} \neq \hat{x}_1^{\mathfrak{P}} \neq x_1^{\mathfrak{P}}$ sind also alle Nebenbedingungen erfüllt.

Somit haben wir für jedes $\mathfrak{P} \in S$ dieselbe Anzahl von Vektoren

$x_0^{\mathfrak{p}} = x, x_1^{\mathfrak{p}}, \ldots, x_{l-1}^{\mathfrak{p}}, x_l^{\mathfrak{p}} = y, l \geq 1$, aus $V_{\mathfrak{p}}$ mit $h(x_i^{\mathfrak{p}}) = h(x)$ und $x_{i-1}^{\mathfrak{p}} \neq x_i^{\mathfrak{p}}$ für alle $\mathfrak{p} \in S$, $1 \leq i \leq l$; ferner gilt $x_i^{\mathfrak{p}} = s_{b_i^{\mathfrak{p}}}(x_{i-1}^{\mathfrak{p}})$, $1 \leq i \leq l$, mit einem Vektor $b_i^{\mathfrak{p}} \in V_{\mathfrak{p}}$, derart dass $h(b_i^{\mathfrak{p}}) \in D_{\mathfrak{p}}^*$ in $W_{\mathfrak{p}}$ dargestellt wird, für alle $\mathfrak{p} \in S$.

Nun wenden wir Lemma 3 an; es liefert uns Vektoren $x_0 = x, x_1, \ldots, x_{l-1}, x_l = y$ aus V mit $h(x_i) = h(x)$ und $x_{i-1} \neq x_i$ für alle $1 \leq i \leq l$ und Elemente $\eta_i \in D^*$, derart dass $h(b_i)$, mit $b_i = (x_{i-1} - x_i)\eta_i^{-1}$, $\mathfrak{p}$-adisch beliebig nahe an $h(b_i^{\mathfrak{p}})$ liegt, für alle $\mathfrak{p} \in S$ und $1 \leq i \leq l$.

Auf Grund des Stetigkeitssatzes (§1.4) wird also $\langle b_i \rangle_{\mathfrak{p}} \cong \langle b_i^{\mathfrak{p}} \rangle$ (Fall I,II) bzw. $f_{\mathfrak{p}}|\langle b_i \rangle \cong f_{\mathfrak{p}}|\langle b_i^{\mathfrak{p}} \rangle$ (Fall III,IV) stattfinden, falls nur die Approximation gut genug ist; im letzten Fall ist das gleichwertig mit einer Isometrie $\langle b_i \rangle_{\mathfrak{p}} \cong \langle b_i^{\mathfrak{p}} \rangle$ als hermitesche bzw. quadratische Räume über $D_{\mathfrak{p}}$. Folglich stellt jeder der Räume $W_{\mathfrak{p}}$, $\mathfrak{p} \in S$, den Wert $h(b_i)$, also auch den Wert $h(x_{i-1} - x_i)$, $1 \leq i \leq l$, dar, weil er $h(b_i^{\mathfrak{p}})$ darstellt. Nach (3.1) folgt nun, dass W global den Wert $h(b_i)$ darstellt.

Damit haben wir (siehe 1.Schritt) eine Isometrie $v_1 \in G$, mit $v_1(x) = x_1 = y = w_{\mathfrak{p}}(x)$. Es waren $w_{\mathfrak{p}}(x) = u(x)$ und $x = a_1$. Man kann also $v_1^{-1}u$ als Isometrie von W_1 auffassen, weil $V = W_1 \perp \langle a_1 \rangle$ ist und weil $v_1^{-1}u$ den Vektor a_1 festlässt.

3. Wir wiederholen die obige Konstruktion mit W_1 statt $W_0 = V$, $x = a_2$ statt a_1 und $v_1^{-1}u$ statt u, falls $t \geq 2$ und $S_1 = \{\mathfrak{P} : \mathfrak{P}$ kritisch bzgl. $W_1\}$ nichtleer ist. Andernfalls ist der Beweis zu Ende, denn $S_1 = \emptyset$ bedeutet nach (3.1) offenbar dass W universell in W_1 ist; folglich ist die Darstellbarkeit eines $\alpha \in h(V)^*$ in W gleichwertig mit der in W_1.

Die Wiederholung (falls $t \geq 2$ und $S_1 = \emptyset$) ergibt ein $v_2 \in U(W_1) \cap G$ mit $v_1^{-1}u(x) = v_2(x)$; das heisst $v_2^{-1}v_1^{-1}u$ ist als Isometrie von W_2 auffassbar.

Nach s-maliger Wiederholung dieser Konstruktion, wobei $1 \leq s \leq t$ ist, erhalten wir Isometrien $v_1, \ldots, v_s \in G$, derart dass $v_s^{-1} \ldots v_1^{-1}u$ als Isometrie von W_s aufgefasst werden kann; dabei ist s so beschaffen, dass $W_s \supseteq W_t = W$ universell in W ist. Also ist die Darstellbarkeit eines Elements $\alpha \in h(V)^*$ in W gleichwertig mit der in W_s . Da $U(W_s)$ von Spiegelungen an anisotropen Vektoren aus W_s erzeugt wird, ist somit die Behauptung des Satzes bewiesen.

§ 4. Direkter Beweis der Fasteinfachheit

Voraussetzung in dem gesamten §4 ist, dass irgendeiner der Fälle I,II,III,IV vorliegt und dass V a n i s o t r o p ist.

4.1 Zurückführung auf Normalteiler von U_n

Wir wollen zeigen, dass jeder nicht im Zentrum enthaltene Normalteiler $\hat{N}$ von U_n' einen nicht-zentralen Normalteiler N von U_n umfasst. Dazu konstruieren wir zuerst eine Isometrie in $\hat{N}$, deren Fixraum möglichst hohe Dimension hat.

HILFSSATZ 1.

Es sei $n \geq 5$; $\hat{N}$ sei ein nicht-zentraler Normalteiler von $U_n'(V)$. Dann gibt es eine Isometrie $w \in \hat{N}$, aber nicht aus dem Zentrum, deren Fixraum mindestens die Dimension $n-3$ hat.

Beweis (vgl. M.Kneser [12]). Das Zentrum Z_n der unitären Gruppe besteht aus allen Isometrien, die jeden Vektor

$x \in V$ in ein festes Vielfaches $x\gamma$, mit γ aus dem Zentrum von D, überführen. Man wähle $u \in \hat{N}$, aber nicht aus Z_n. Dann gibt es eine Ebene R in V, die von u nicht in sich übergeführt wird. Sei $t \notin Z_2$ eine Isometrie aus $U_2'(R)$; dann ist $v = t^{-1}utu^{-1}$ aus $\hat{N}$ und lässt offenbar den Teilraum $(R + uR)^{\perp}$ elementweise fest, denn t^{-1} wirkt auf R und utu^{-1} auf uR. Wegen $n \geq 5$ ist $(R + uR)^{\perp}$ mindestens eindimensional. Ferner ist $v \neq 1$, denn aus $uR \neq R$ folgt $utu^{-1} \neq t$. Somit ist $v \notin Z_n$, denn v hat einen nicht-trivialen Fixraum. Sei W der genaue Fixraum von v, d.h. $W = \{x \in V : v(x) = x\}$. Wir wählen zwei Vektoren $x \in W$, $y \in W^{\perp}$, beide $\neq 0$, und betrachten die Ebene $S = \langle x,y \rangle$. Wegen $x \in S \cap vS$ ist $\dim(S \cap vS) \geq 3$. Ist $vS \neq S$, so sei $s \notin Z_2$ eine beliebige Isometrie aus $U_2'(S)$. Dann liegt $w = s^{-1}vsv^{-1}$ in $\hat{N}$, lässt den Teilraum $(S + vS)^{\perp}$ elementweise fest (Begründung genau wie oben für v) und erfüllt somit die im Hilfssatz gestellten Forderungen. Ist aber $vS = S$, so ist $v(y) = y\lambda$, mit einem $\lambda \in D^*$; $\lambda \neq 1$, da $y \notin W$ gilt. Das heisst, v ist eine Spiegelung auf S. Dann gibt es sicher eine Isometrie $s \in U_2'(S)$ mit $vs \neq sv$ (man hat nur ein $s \in U_2'(S)$ mit $s(y) \notin \langle y \rangle$ zu wählen). Dann leistet $w = s^{-1}vsv^{-1}$ wiederum das Verlangte.

Im Fall II lässt sich die Aussage des Hilfssatzes 1 etwas verschärfen.

HILFSSATZ 1a.

Es liege der Fall II vor; es sei $n \geqslant 2$; $\hat{N}$ sei ein nicht-zentraler Normalteiler von $U_n'(V)$.

Dann gibt es eine Isometrie $w \in \hat{N}$, aber $w \notin Z_n$, deren Fixraum mindestens die Dimension $n-2$ hat.

Beweis. Man wähle $u \in \hat{N}$, aber $u \notin Z_n$. Dann gibt es einen Vektor $a \in V$ mit $u(a) \neq a\xi$ für alle $\xi \in D$. Wir wählen zwei Elemente $\lambda, \nu \in D^*$, derart dass $\bar{\lambda} \alpha \lambda = \alpha$, $\bar{\nu} \alpha \nu = \alpha$ und $\lambda\nu \neq \nu\lambda$ gilt, wobei $\alpha = h(a) \in D^*$ sei. Da α sogar in k^* liegt, sollen also λ, ν in der Normeinsgruppe von D liegen; diese ist bekanntlich nicht-abelsch, also gibt es λ, ν mit den verlangten Eigenschaften. Für $\mu = \lambda\nu\lambda^{-1}\nu^{-1}$ gilt dann $\mu \neq 1$ und $\bar{\mu} \alpha \mu = \alpha$. Dann ist die Spiegelung

$$ {}^{\mu}s_a = {}^{\lambda}s_a \, {}^{\nu}s_a \, {}^{\lambda}s_a^{-1} \, {}^{\nu}s_a^{-1} \quad \text{in } U_n'(V) $$

gelegen. Also ist $w = {}^{\mu^{-1}}s_a \, {}^{\mu}s_{ua} = {}^{\mu}s_a^{-1} \, u \, {}^{\mu}s_a u^{-1}$ aus $\hat{N}$, aber nicht im Zentrum, weil $u(a) \neq a\xi$ galt. Diese ebene Drehung w leistet also das Verlangte.

Um den Satz 1 anwenden zu können, müssen wir aber im Fall IV erreichen, dass der Fixraum von w lokal an jeder kritischen Primstelle isotrop ist. Dazu brauchen wir das folgende Lemma 4, das auch später im Beweis von Hilfssatz 3 benutzt wird.

LEMMA 4.

Es sei $n \geq 4$ im Fall II, $n \geq 5$ sonst. Es sei $\hat{N}$ ein nicht-zentraler Normalteiler von $U_n'(V)$. Setze $S = \{\mathfrak{p} : \mathfrak{p} \text{ kritisch bezüglich } V\}$.

Zu vorgegebenen Isometrien $u_\mathfrak{p} \in U_n'(V_\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in S$, gibt es dann eine Isometrie $u \in \hat{N}$, die sich $\mathfrak{p}$-adisch beliebig wenig von $u_\mathfrak{p}$ unterscheidet, für jedes $\mathfrak{p} \in S$.

Beweis. Man nehme die in Hilfssatz 1 bzw. 1a konstruierte Isometrie $w \in \hat{N}$ her und betrachte die von allen Elementen der Gestalt

$$s_\mathfrak{p} w s_\mathfrak{p}^{-1} t_\mathfrak{p} w^{-1} t_\mathfrak{p}^{-1}, \quad \text{mit} \quad s_\mathfrak{p}, t_\mathfrak{p} \in U_n'(V_\mathfrak{p})$$

erzeugte Untergruppe von $U_n'(V_\mathfrak{p})$, $\mathfrak{p} \in S$ fest. Sie ist sicher nicht im Zentrum enthalten. Denn, ist W der Fixraum von w, so wähle man ein $s_\mathfrak{p} \in U'(W^\perp)$ mit $s_\mathfrak{p} w s_\mathfrak{p}^{-1} w^{-1} \neq 1$; diese letzte Isometrie gehört offenbar nicht zum Zentrum von $U_n'(V_\mathfrak{p})$. Die fragliche Untergruppe ist sogar Normalteiler in $U_n'(V_\mathfrak{p})$, wie man leicht feststellt. Wegen der Fasteinfachheit von $U_n'(V_\mathfrak{p})$ (siehe p.31) stimmt sie also mit $U_n'(V_\mathfrak{p})$ überein.

Für jedes $\mathfrak{p} \in S$ hat man also eine Darstellung für $u_\mathfrak{p}$:

$$u_\mathfrak{p} = \prod_{i=1}^{r} s_i^\mathfrak{p} w s_i^{\mathfrak{p}\,-1} t_i^\mathfrak{p} w^{-1} t_i^{\mathfrak{p}\,-1}, \quad s_i^\mathfrak{p}, t_i^\mathfrak{p} \in U_n'(V_\mathfrak{p}).$$

Die Anzahl r kann für alle $\mathfrak{p} \in S$ gleich gewählt werden, indem man Faktoren mit $s_\mathfrak{p} = t_\mathfrak{p} = 1$ hinzufügt.

Nun approximiere man jede der Folgen $(s_i^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in S}$, $(t_i^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p}\in S}$, $1 \leq i \leq r$, durch Elemente s_i, t_i aus $U_n'(V)$ (nach dem schwachen Approximationssatz) genügend gut. Damit erhält man ein Element

$$u = \prod_{i=1}^{r} s_i w s_i^{-1} \cdot t_i w^{-1} t_i^{-1}$$

aus $\hat{N}$, das aus Stetigkeitssgründen $\mathfrak{p}$-adisch beliebig nahe an $u_{\mathfrak{p}}$ liegt, für jedes $\mathfrak{p}\in S$, falls nur die Approximation der $s_i^{\mathfrak{p}}, t_i^{\mathfrak{p}}$ an s_i, t_i gut genug ist.

HILFSSATZ 1b.

Es liege der Fall IV vor; es sei $n \geq 5$. $\hat{N}$ sei ein nicht-zentraler Normalteiler von $U_n'(V)$. Setze $S = \{\mathfrak{p}: \mathfrak{p}$ kritisch bezüglich $V\}$.

Dann gibt es eine Isometrie $w \in \hat{N}$, aber $w \notin Z_n$, deren Fixraum mindestens die Dimension $n-4$ hat und so beschaffen ist, dass $f_{\mathfrak{p}}|W$ isotrop ist, für jedes $\mathfrak{p}\in S$.

Beweis. Wir benutzen die Bezeichnungen von §2.4 (mit $f_{\mathfrak{p}} = q'_{\mathfrak{p}}$). Für jedes $\mathfrak{p}\in S$ wählen wir eine hyperbolische Ebene (also isotrop) $H'_{\mathfrak{p}}$ in $V'_{\mathfrak{p}}$ und setzen $T'_{\mathfrak{p}} = (H'_{\mathfrak{p}})^{\perp}$. Wir b e h a u p t e n :

Es gibt einen Teilraum $R'_{\mathfrak{p}} \subset T'_{\mathfrak{p}}$ der Dimension 4 (über $k_{\mathfrak{p}}$) und eine Isometrie $u'_{\mathfrak{p}} \in \Omega_{2n}(f_{\mathfrak{p}})$ derart dass $R'_{\mathfrak{p}} \cap u'_{\mathfrak{p}} R'_{\mathfrak{p}} = 0$ gilt und dass $(R'_{\mathfrak{p}} + u'_{\mathfrak{p}} R'_{\mathfrak{p}})^{\perp} \subset V'_{\mathfrak{p}}$ isotrop ist.

Es ist $\dim_k T'_{\mathfrak{p}} = 2n-2 \geq 8$. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit dürfen wir annehmen, dass $T'_{\mathfrak{p}}$, für jedes $\mathfrak{p} \in S$, eine Signatur $(\nu, 2n-2-\nu)$ hat, mit $\nu \geq n-1 \geq 4$. Dann gibt es in $T'_{\mathfrak{p}}$ einen 4-dimensionalen positiv definiten Teilraum $R'_{\mathfrak{p}} = \langle \hat{e}_1^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_2^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_3^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_4^{\mathfrak{p}} \rangle$ und einen dazu orthogonalen Teilraum $\langle \hat{e}_5^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_6^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_7^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_8^{\mathfrak{p}} \rangle \subset T'_{\mathfrak{p}}$ der Dimension 4. Wir setzen $S'_{\mathfrak{p}} = \langle \hat{e}_1^{\mathfrak{p}} + \varepsilon \hat{e}_5^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_2^{\mathfrak{p}} + \varepsilon \hat{e}_6^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_3^{\mathfrak{p}} + \varepsilon \hat{e}_6^{\mathfrak{p}}, \hat{e}_4^{\mathfrak{p}} + \varepsilon \hat{e}_8^{\mathfrak{p}} \rangle$ mit $\varepsilon > 0$ an. Ist ε klein genug, so gilt $f_{\mathfrak{p}}(\hat{e}_i + \varepsilon \hat{e}_{i+4}) > 0$ für alle $1 \leq i \leq 4$. Dann ist also $S'_{\mathfrak{p}}$ ebenfalls positiv definit, folglich isometrisch zu $R'_{\mathfrak{p}}$. Da $(R'_{\mathfrak{p}})^{\perp}$ isotrop ist, können wir erreichen, dass $S'_{\mathfrak{p}} = u'_{\mathfrak{p}}(R'_{\mathfrak{p}})$ gilt, mit einem $u'_{\mathfrak{p}}$ aus $O'_{2n}(f_{\mathfrak{p}}) = \Omega_{2n}$. Dass $R'_{\mathfrak{p}} \cap S'_{\mathfrak{p}} = 0$ gilt, ist klar.

Es bezeichne $R_{\mathfrak{p}}$ den $R'_{\mathfrak{p}}$ entsprechenden 2-dimensionalen Teilraum von $V'_{\mathfrak{p}}$ und $u_{\mathfrak{p}}$ die $u'_{\mathfrak{p}}$ entsprechende Isometrie von $V_{\mathfrak{p}}$. Wegen $u'_{\mathfrak{p}} \in \Omega_{2n}(f_{\mathfrak{p}})$ gilt $u_{\mathfrak{p}} \in U'_n(V_{\mathfrak{p}})$. Es gelte $R_{\mathfrak{p}} = \langle e_1^{\mathfrak{p}}, e_2^{\mathfrak{p}} \rangle$ über $D_{\mathfrak{p}}$. Wir approximieren nun die Vektoren $(e_i^{\mathfrak{p}})_{\mathfrak{p} \in S}$, $i = 1,2$, durch einen Vektor $e_i \in V$ und setzen $R = \langle e_1, e_2 \rangle$. Die Isometrien $u_{\mathfrak{p}} \in U'_n(V_{\mathfrak{p}})$, $\mathfrak{p} \in S$, approximieren wir nach Lemma 4 durch eine Isometrie $u \in \hat{N}$.

Auf Grund des Stetigkeitssatzes ist klar, dass bei genügend guter Annäherung $(R' + u'R')_{\mathfrak{p}} \cong R'_{\mathfrak{p}} + u'_{\mathfrak{p}} R'_{\mathfrak{p}} \subset T'_{\mathfrak{p}}$ stattfinden wird, für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Also ist $f_{\mathfrak{p}} | (R+uR)^{\perp}$ isotrop für alle $\mathfrak{p} \in S$. Ferner ist dann u sicher $\notin Z_n$.

Mit dieser Isometrie $u \in \hat{N}$ und der Ebene $R \subset V$ können wir genau wie in Hilfssatz 1 eine Isometrie

$v = t^{-1}utu^{-1} \in \hat{N}$ konstruieren, die die verlangten Eigenschaften hat.

Nun sind wir imstande, den Hilfssatz 2 in [12] auf den unitären Fall übertragen zu können.

HILFSSATZ 2.

Es sei $n \geqslant 4$ im Fall II, $n \geqslant 5$ im Fall I oder III und $n \geqslant 7$ im Fall IV.

Dann enthält jeder nicht-zentrale Normalteiler $\hat{N}$ von $U_n'(V)$ einen Normalteiler N von $U_n(V)$, der ebenfalls nicht-zentral ist.

Beweis. Nach Hilfssatz 1 bzw. 1a bzw. 1b gibt es in $\hat{N}$ eine Isometrie $w \notin Z_n$, deren Fixraum W die Voraussetzungen des Satzes 1 (p. 36) erfüllt . Nach Satz 1 wird $U_n(V)$ von Spiegelungen s_a erzeugt, derart dass $h(a)$ in W dargestellt wird. Ist also $\hat{a}$ ein Vektor in W mit $h(\hat{a}) = h(a)$, so gibt es ein $t \in U_n(V)$ mit $t(\hat{a}) = a$. Dann ist $w\, s_{\hat{a}} = s_{\hat{a}}\, w$ und $v = t\, s_{\hat{a}}\, t^{-1} s_{\hat{a}}^{-1}$ aus $U_n'(V)$; folglich ist

$$s_a\, w\, s_a^{-1} = t\, s_{\hat{a}}\, t^{-1} w\, t\, s_{\hat{a}}^{-1} t^{-1} = v\, w\, v^{-1}$$

in $\hat{N}$ gelegen.

Ist s_b eine weitere Spiegelung obiger Art, das heisst, wird $h(b)$ in W dargestellt, so zeigt man analog, dass $s_b(s_a w s_a^{-1})s_b^{-1}$ in N liegt. Zu beachten ist dabei nur, dass der Fixraum von $s_a w s_a^{-1}$ — er ist $s_a(W)$ — zu W

isometrisch ist. Da $U_n(V)$ von Spiegelungen dieser Art erzeugt wird, gilt ersichtlich

$$u\, w\, u^{-1} \in \hat{N} \quad \text{für jede Isometrie} \quad u \in U_n(V).$$

Daraus folgt, dass der von w erzeugte Normalteiler N von $U_n(V)$ in $\hat{N}$ enthalten ist. Es ist $N \not\subset Z_n$, weil $w \notin Z_n$ ist.

Auf Grund von Hilfssatz 2 haben wir nun zu zeigen, dass N die Kommutatorgruppe U_n' umfasst. Dieser Nachweis wird im zweiten Teil des Beweises (§4.2) erbracht.

4.2 Schluss des Beweises

HILFSSATZ 3. Es sei n wie in Hilfssatz 2. Es sei $N \subset U_n'$ ein nicht-zentraler Normalteiler von $U_n(V)$.

Es seien $a,b \in V$ zwei verschiedene Vektoren mit $h(a) = h(b)$. Ist die Symmetriehyperebene $\langle a-b \rangle^{\perp}$ universell in V (im Sinne von p.14) und ist im Fall IV zusätzlich $f_{\mathfrak{p}} | \langle a \rangle^{\perp}$ isotrop für jede kritische Primstelle $\mathfrak{p}$, so gibt es eine Isometrie $t \in N$ mit $t(a) = b$.

Beweis (vgl. M.Kneser 12).

1) Zuerst nehmen wir an, dass a,b linear unabhängig sind.

Wir wollen die Existenz einer Isometrie $u \in N$ und eines Vektors $c \in V$ nachweisen, derart dass gilt :

$$h(a) = h(b) \neq h(c), \quad h(a,c) = h(b,c) = h(a,ua).$$

Daraus wird die Behauptung sofort folgen. Denn, es gilt dann $\langle a,c\rangle \cong \langle a,ua\rangle$ und $\langle b,c\rangle \cong \langle a,ua\rangle$. Nach dem Satz von Witt gibt es Isometrien $v,w \in U_n(V)$ mit

$$v(a) = a, \quad v(ua) = c \quad \text{und} \quad w(a) = b, \quad w(ua) = c.$$

Dann ist $vuv^{-1}(a) = c$ und $wuw^{-1}(b) = c$; also erfüllt $t = (wuw^{-1})^{-1}(vuv^{-1})$ die gestellten Forderungen.

Zur Konstruktion von u setzen wir $T = \langle a,b\rangle$ und $S = \{\mathfrak{P} : \mathfrak{P}$ kritisch bzgl. $V\}$. Da $\langle a-b\rangle^{\perp}$ universell in V ist, gibt es einen Vektor $e \in \langle a-b\rangle^{\perp}$, d.h. mit $h(a,e) = h(b,e)$, so dass $h(e) = h(a)$ gilt. Es gibt dann eine Isometrie $s \in U_n(V)$ mit $s(a) = e$. Wegen (3.2), p.32, können wir für jedes $\mathfrak{P} \in S$ annehmen, dass statt s eine Isometrie $v \in U_n'(V_{\mathfrak{P}})$ mit $v_{\mathfrak{P}}(a) = e$ vorliegt.

Diese Isometrien $v_{\mathfrak{P}}$, $\mathfrak{P} \in S$, approximieren wir nach Lemma 4 durch eine Isometrie $u \in N$ genügend gut. Dieses u ist so beschaffen, dass damit die Existenz eines Vektors $c \in V$ mit den verlangten Eigenschaften nachgewiesen werden kann. Dazu dient die folgende Konstruktion.

Es sei R ein 3-dimensionaler Vektorraum über D, der von Vektoren $\hat{a},\hat{b},\hat{c}$ aufgespannt wird und auf dem

durch $\hat{h}(\hat{a}) = \hat{h}(\hat{b}) = \hat{h}(\hat{c}) = h(a)$, $\hat{h}(\hat{a},\hat{b}) = h(a,b)$ und $\hat{h}(\hat{a},\hat{c}) = \hat{h}(\hat{b},\hat{c}) = h(a,ua)$ eine J-(schief)hermitesche Form $\hat{h}$ definiert sei. Unser Ziel wird erreicht sein, wenn wir den Raum R isometrisch in V einbetten können; denn dann wird das Bild von $\hat{c}$ in V bei einer Isometrie $R \to V$ das Verlangte leisten. Die Ebene $\langle \hat{a},\hat{b} \rangle$ ist nun per definitionem isometrisch zur Ebene $\langle a,b \rangle \subset V$. Wir müssen also nur noch die dazu senkrechte Gerade in R isometrisch in $T = \langle a,b \rangle^{\perp}$ einbetten. Dies ist gleichbedeutend damit, dass es zu einem Vektor $\hat{d}$ aus $\langle \hat{a},\hat{b} \rangle^{\perp}$ mit $\hat{h}(\hat{d}) \neq 0$ einen Vektor $d \in T$ mit $h(d) = \hat{h}(\hat{d})$ gibt. Die getroffene Wahl von u sichert nun nach dem HASSE-Prinzip die Existenz eines solchen Vektors. Da $\dim_D T$ genügend gross ist, genügt es nach (3.1), die lokale Existenz nur an den Primstellen $\mathfrak{p} \in S$ nachzuweisen.

Für jedes $\mathfrak{p} \in S$ enthält nun $V_{\mathfrak{p}}$ einen zu $R_{\mathfrak{p}}$ isometrischen Teilraum, nämlich $\langle a,b,v_{\mathfrak{p}}a \rangle$, woraus natürlich die Darstellbarkeit von $\hat{h}(\hat{d})$ in $T_{\mathfrak{p}}$ folgt. Die Zuordnung $\hat{a} \to a$, $\hat{b} \to b$, $\hat{c} \to v_{\mathfrak{p}}a$ ergibt eine Isometrie von $R_{\mathfrak{p}}$ auf $\langle a,b,v_{\mathfrak{p}}a \rangle$ im Fall I,II bzw. der zugehörigen hermiteschen oder quadratischen Formen $\hat{f}_{\mathfrak{p}}(R)$ und $f_{\mathfrak{p}} | \langle a,b,v_{\mathfrak{p}}a \rangle$ über $K_{\mathfrak{p}}$ bzw. $k_{\mathfrak{p}}$ (Fall III bzw. IV), wie man unmittelbar dem Stetigkeitssatz entnimmt. Denn das Skalarprodukt $\hat{h}(\hat{b},\hat{c}) = \hat{h}(\hat{a},\hat{c}) = h(a,ua)$ unterscheidet sich $\mathfrak{p}$-adisch beliebig wenig von $h(a,v_{\mathfrak{p}}a) = h(b,v_{\mathfrak{p}}a)$ für alle $\mathfrak{p} \in S$,

falls nur die Approximation von den $v_\mathfrak{p}$ an u gut genug ist, während alle anderen Skalarprodukte definitionsgemäss übereinstimmen. Im Fall III,IV ist aber eine Isometrie $\hat{f}_\mathfrak{p}(R) \cong f_\mathfrak{p}|\langle a,b,v_\mathfrak{p}a\rangle$ gleichwertig mit einer Isometrie der Räume $R_\mathfrak{p}$ und $\langle a,b,v_\mathfrak{p}a\rangle$ über $D_\mathfrak{p}$. Es ist also in jedem Fall $R_\mathfrak{p} \cong \langle a,b,v_\mathfrak{p}a\rangle$.

Damit ist die Behauptung im Fall, dass a,b linear unabhängig sind, vollständig bewiesen. Der Fall, dass $a = b\lambda$ gilt, führen wir auf den obigen zurück.

2) Es gelte $a = b\lambda$ mit $\lambda \neq 1$ aus D^*. Dann ist $\langle a-b\rangle^\perp = \langle a\rangle^\perp = \langle b\rangle^\perp$. Es sei $e \in \langle a\rangle^\perp$ mit $h(a) = h(e)$ gewählt. Dann ist $h(a-e) = 2\,h(a)$. Über $D_\mathfrak{p}$ sind also $\langle \frac{a}{\sqrt{2}}\rangle = \langle a\rangle$ und $\langle a-e\rangle$ isometrisch, für jedes $\mathfrak{p} \in S$.

Also gilt $\langle a-e\rangle_\mathfrak{p}^\perp \cong \langle a\rangle^\perp$ für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Also stellt $\langle a-e\rangle_\mathfrak{p}^\perp$ jeden Wert aus $h(V)^*$ dar, weil $\langle a\rangle^\perp$ es tut. Für jedes $\mathfrak{p} \in S$ gibt es also einen Vektor $d_\mathfrak{p} \in \langle a-e\rangle_\mathfrak{p}^\perp$ mit $h(a) = h(d_\mathfrak{p})$. Dann gibt es eine Isometrie $v_\mathfrak{p} \in U_n(V_\mathfrak{p})$ mit $v_\mathfrak{p}(a) = d_\mathfrak{p}$. Dies gilt (diese Tatsache ist bereits oben stillschweigend benutzt worden) auch dann, wenn $D_\mathfrak{p}$ kein Körper ist (Fall III,IV). Im Fall IV gilt dies nach [3], Satz 7. Im Fall III folgt dies durch Zurückführung auf $f_\mathfrak{p}$. Denn $h(a) = h(d_\mathfrak{p})$ bedeutet $f_\mathfrak{p}|\langle a\rangle = f_\mathfrak{p}|\langle d\rangle$. Daraus folgt $f_\mathfrak{p}|\langle a\rangle \cong f_\mathfrak{p}|\langle d_\mathfrak{p}\rangle$. Einer Isometrie von $f_\mathfrak{p}|\langle a\rangle$ auf $f_\mathfrak{p}|\langle d_\mathfrak{p}\rangle$ entspricht eine Isometrie der Räume $\langle a\rangle_\mathfrak{p}^\perp, \langle d_\mathfrak{p}\rangle^\perp$ über $D_\mathfrak{p}$. Setzt man diese Isometrie $v_\mathfrak{p}$ durch $v_\mathfrak{p}(a) = d_\mathfrak{p}$ auf $V_\mathfrak{p}$

fort, so hat man eine Isometrie des ganzen Raumes V_φ. Wegen (3.2) dürfen wir annehmen, daß sogar ein $v_\varphi \in U_n'(V_\varphi)$ mit $v_\varphi(a) = d_\varphi$ vorliegt, für jedes $\varphi \in S$. Wir approximieren diese v_φ, $\varphi \in S$, durch eine Isometrie $u \in N$ genügend gut (nach Lemma 4) und können alsdann die Konstruktion in Teil 1) für das Paar a,e durchführen. Dies ergibt eine Isometrie $t_1 \in N$ mit $t_1(a) = e$. Dies alles können wir auch mit dem Paar e,b durchführen; es gibt also ein $t_2 \in N$ mit $t_2(e) = b$. Für $t_2 t_1 \in N$ gilt also $t_2 t_1(a) = b$.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

HILFSSATZ 4.

Die Voraussetzungen seien dieselben wie in Hilfssatz 3. Sind s_a, s_b Spiegelungen an zwei Hyperebenen, die beide universell in V sind, so liegt der Kommutator $s_a^{-1} s_b s_a s_b^{-1}$ in N.

Beweis. Gilt $s_a(b) = b$, so sind s_a, s_b vertauschbar (Lemma 1) und die Behauptung ist trivial. Andernfalls gilt $\langle a \rangle = \langle s_a(b) - b \rangle$ und die Voraussetzungen des Hilfssatzes 3 sind für das Paar $b, s_a(b)$ erfüllt (auch die Zusatzbedingung im Fall IV, da $\langle b \rangle^\perp$ universell ist). Es gibt also eine Isometrie $t \in N$ mit $t(b) = s_a(b)$. Dann ist $z = t^{-1} s_a$ mit s_b vertauschbar (Lemma 1) und es ist

$$s_a^{-1} s_b s_a s_b^{-1} = z^{-1} . t^{-1} s_b t \, s_b^{-1} . z$$

in N gelegen, wie behauptet.

Den Schluss des Beweises, die Inklusion $U_n \subseteq N$, liefert der Hilfssatz 5 unten, unter Beachtung des Lemmas 5.

LEMMA 5. Es sei G eine Gruppe, E ein Erzeugendensystem von G. Es bezeichne G' die Kommutatorgruppe von G und E' die von allen Kommutatoren von Elementen aus E erzeugte Untergruppe von G.

Dann ist G' der von E' erzeugte Normalteiler von G.

Ist speziell E' Normalteiler in G, so ist $E' = G'$.

(In unserer Anwendung ist $G = U_n(V)$ und $E = \{s_a : \langle a\rangle^{\perp}$ universell in $V\}$).

Beweis. Ist $\hat{E}$ der von E' erzeugte Normalteiler von G, so ist die Faktorgruppe $G/\hat{E}$ offenbar abelsch, weil E Erzeugendensystem für G ist. Das heisst, $\hat{E} \supseteq G'$, während definitionsgemäss $\hat{E} \subseteq G'$ gilt.

HILFSSATZ 5.

Es sei $n \geq 7$ im Fall IV, $n \geq 4$ sonst.

$U_n(V)$ wird von den Spiegelungen an Hyperebenen erzeugt, die universell in V sind.

Beweis. Setze $S = \{\mathfrak{P} : \mathfrak{P}$ kritisch bezüglich $V\}$.
Wir dürfen ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass für jedes $\mathfrak{P} \in S$, die lokale hermitesche oder quadratische Form $f_{\mathfrak{P}}$ eine Signatur (1,mn-1) hat,

mit $l \geq \frac{mn}{2}$; dabei ist der Einheitlich halber im Fall I, II, $m = 1$ zu verstehen; im Fall IV ist natürlich $m = 2$. Diese Bedingung kann man stets durch eine geeignete "Umeichung" des Raumes V, was an der unitären Gruppe nichts ändert, erzwingen. Das heisst, man ersetze notfalls die Form h durch ηh, mit einer Zahl $\eta \in k^*$, die für alle $\mathfrak{p} \in S$, wo die Bedingung nicht erfüllt ist, negativ in $k_\mathfrak{p}$, während an den übrigen Primstellen $\mathfrak{p} \in S$, positiv in $k_\mathfrak{p}$ ausfällt.

Dann gibt es Vektoren $a \in V$ mit $h_\mathfrak{p}(a) > 0$ im Fall I,II bzw. mit $j_\mathfrak{p}(a) = m$ im Fall III, für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Wegen $n \geq 4$ gibt es sogar einen Teilraum W der Dimension ≥ 2, dessen sämtliche Vektoren $\neq 0$ diese Eigenschaft haben. Nach Satz 1 wird $U_n(V)$ von Spiegelungen s_a erzeugt, derart dass h(a) in W dargestellt wird. Es genügt also zu zeigen, dass für jeden Vektor $a \neq 0$ aus W, die Hyperebene $\langle a \rangle^\perp$ universell in V ist. Nach (3.1) sind höchstens die Primstellen $\mathfrak{p} \in S$ auf lokale Darstellbarkeit hin zu prüfen. Es genügt also zu zeigen, dass für jedes $\mathfrak{p} \in S$ die Hyperebene $\langle a \rangle_\mathfrak{p}^\perp$ jeden Wert aus $h(V)^*$ darstellt.

Im Fall I oder II heisst das : $\langle a \rangle_\mathfrak{p}^\perp$ muss indefinit sein für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Nun ist $V_\mathfrak{p}$ indefinit und $h_\mathfrak{p}(a) > 0$; also enthält $\langle a \rangle_\mathfrak{p}^\perp$ Vektoren b mit $h_\mathfrak{p}(b) < 0$. Wegen der Voraussetzung über die Signatur kann aber $\langle a \rangle^\perp$ nicht

negativ definit, ebenso wenig positiv definit, sein. Das heisst, $\langle a\rangle_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ ist indefinit.

Im Fall III gilt $j_{\mathfrak{p}}(a) = m$ für alle $a \neq 0$ aus W und $j_{\mathfrak{p}}(V) \geq 2m$, für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Für einen beliebigen Vektor $x \neq 0$ aus V gilt also

$$m \leq j_{\mathfrak{p}}(V) - j_{\mathfrak{p}}(x) \leq m(n-1).$$

Wegen $j_{\mathfrak{p}}(V) = j_{\mathfrak{p}}(a) + j_{\mathfrak{p}}(\langle a\rangle^{\perp})$ folgt hieraus,

$$0 \leq j_{\mathfrak{p}}(\langle a\rangle^{\perp}) - j_{\mathfrak{p}}(x) \leq m(n-2).$$

Das heisst aber nach (2.3), $\langle a\rangle_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ stellt $h(x)$ dar.

Nun zum Fall IV. Hier habe $V'_{\mathfrak{p}}$ die Signatur $(1,2n-1)$ mit $1 \geq n \geq 7$, für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Es gibt also in $V'_{\mathfrak{p}}$ einen (über $k_{\mathfrak{p}}$) 6-dimensionalen Teilraum, dessen orthogonale Komplement in $V'_{\mathfrak{p}}$ indefinit ist und der selbst positiv definit ist. Diesem Teilraum in $V'_{\mathfrak{p}}$ entspricht ein 3-dimensionaler Teilraum in $V_{\mathfrak{p}}$. Global gibt es also in V einen 3-dimensionalen Teilraum W, derart dass $f_{\mathfrak{p}}|W$ positiv definit und $f_{\mathfrak{p}}|W^{\perp}$ indefinit ist, für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Nach Satz 1 wird also $U_n(V)$ von solchen Spiegelungen s_a erzeugt, für die $h(a)$ in W darstellbar ist. Für jeden Vektor $a \neq 0$ ist offenbar $f_{\mathfrak{p}}|\langle a\rangle^{\perp}$ isotrop für jedes $\mathfrak{p} \in S$. Daraus folgt, jedes $\langle a\rangle_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ stellt jeden Wert aus $h(V)^*$ dar. Nach (3.1) ist also die Hyperebene $\langle a\rangle^{\perp}$ universell in V.

Damit ist der Hilfssatz vollständig bewiesen.

Somit ist bewiesen :

T h e o r e m A.

Es liege irgendeiner der Fälle[1)] I,II,III,IV vor. Es sei

$n \geqslant 4$ im Fall II,

$n \geqslant 5$ im Fall I oder III,

$n \geqslant 7$ im Fall IV.

h sei anisotrop. Dann ist die Kommutatorgruppe $U_n'(D,h)$ der unitären Gruppe von h fasteinfach.

---

1) Siehe p. 5.

Kapitel II.

BESTIMMUNG DER KOMMUTATORGRUPPE UND BEWEIS DER FASTEINFACHHEIT MITTELS ISOMORPHISMEN

§ 5. Isogenie zwischen U_4^+ (Fall I) und O_6'.

5.1 Konstruktion der hermiteschen Form

In diesem und dem folgenden Paragraphen darf k ein beliebiger kommutativer Körper der Charakteristik $\neq 2$ sein.

Es ist seit langem bekannt, dass es zu einer anisotropen quadratischen Form f in 6 Variablen über k mit einer Diskriminante $d \not\equiv -1 \bmod k^{*2}$, die über $K = k(\sqrt{-d})$ den Index 3 hat, eine ebenfalls anisotrope hermitesche Form h in 4 Variablen über K mit der Diskriminante 1 mod $N_{K/k}(K^*)$ gibt, derart dass zwischen den Gruppen $U_4^+(K,h)$ und $O_6^+(k,f)$ ein Homomorphismus besteht, dessen Kern $\{\pm 1\}$ ist und dessen Bild die Kommutatorgruppe $\Omega_6(k,f)$ umfasst (Dieudonné, [9], p.213, [5], p.946).

Da die Bestimmung des genauen Bildes nach der von

Dieudonné zur Herleitung des Homomorphismus benutzten Methode nicht zu gelingen scheint, sehen wir uns veranlasst den Homomorphismus auf anderem Weg herzuleiten, der dann auch zum genauen Bild führt. Zu diesem Zweck gehen wir von der quadratischen Form aus und ziehen deren Cliffordalgebra (dazu [2], [4], [6], [17]) heran.

Jede anisotrope quadratische Form in 6 Variablen über k mit den anfangs genannten Eigenschaften, lässt sich in die Gestalt

$$(1) \qquad f(x) = a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 + a_3\xi_3^2 - \rho a_1\xi_4^2 - \rho a_2\xi_5^2 - \rho a_3\xi_6^2$$

bringen, mit gewissen $a_1, a_2, a_3 \in k^*$ und einem $\rho \equiv -d \bmod k^{*2}$.

Wir behaupten, die spezielle (zweite) CLIFFORDalgebra $C_6^+(k,f)$ von f ist isomorph zu $M_4(K)$. Dies kann man leicht direkt zeigen; es ist nämlich $C_6^+(k,f)$ das Tensorprodukt zweier Quaternionenalgebren über K, die beide zerfallen. Wir konstruieren ein Linksideal L in C_6^+, das als Vektorraum über K die Dimension 4 hat; daraus wird der Isomorphismus $C_6^+(k,f) \cong M_4(K)$ folgen. Wir können sodann eine hermitesche Form auf L angeben, deren unitäre Gruppe eine besonders bequeme Untergruppe der multiplikativen Gruppe der Cliffordalgebra ist.

Es sei $e_1, \ldots, e_6$ eine Orthogonalbasis von $k^6 \cong V$, in bezug auf die die quadratische Form f die Gestalt (1)

annimmt. In der Cliffordalgebra gilt also,

$$e_1^2 = a_1, \qquad e_2^2 = a_2, \qquad e_3^2 = a_3,$$
$$e_4^2 = -\rho a_1, \qquad e_5^2 = -\rho a_2, \qquad e_6^2 = -\rho a_3 .$$

Es bezeichne $j = e_1e_2e_3e_4e_5e_6 \in C_6^+$ und $j_o=(\rho a_1a_2a_3)^{-1}j$.

Dann gilt $j^2 = \rho(\rho a_1a_2a_3)^2$, also $j_o^2 = \rho$, $j_o^{-1} = \rho^{-1}j_o$.

Man kann also j_o als $\sqrt{\rho} \in K$ auffassen, so dass $K = k(\sqrt{\rho}) = k(j)$ gilt.

Das Ideal L in $C_6^+(k,f)$ konstruieren wir dadurch, dass wir zwei idempotente, mit einander vertauschbare Elemente $u_1, u_2 \in C_6^+$ angeben, derart dass $L = C_6^+ \cdot u_1u_2$ das Gewünschte leistet. Es sind u_1, u_2 durch die Gleichungen

$$2u_1 = 1 + (a_1j_o)^{-1}e_1e_4, \quad 2u_2 = 1 + (a_2j_o)^{-1}e_2e_5$$

definiert. Es gilt

$$4u_1u_2 = 1 + (\rho a_2a_3)^{-1}e_2e_3e_5e_6 + (\rho a_3a_1)^{-1}e_1e_3e_4e_6 - (\rho a_1a_2)^{-1}e_1e_2e_4e_5 .$$

Das allgemeine Element $x \in C_6^+(k,f)$ hat die Gestalt

$$x = \alpha_o + \sum_{i<k} \alpha_{ik}e_ie_k + \sum_{i<k<l<m} \alpha_{iklm}e_ie_ke_le_m + \alpha' j$$
$$(i,kl,m = 1,\ldots,6; \ \alpha_o, \alpha_{ik}, \alpha_{iklm}, \alpha' \in k).$$

Wir multiplizieren das Produkt $4 \cdot x \cdot u_1u_2$ vollständig aus, unter Beachtung der Rechenregeln der Cliffordalgebra (insbesondere $e_ie_k = -e_ke_i$ für $i \neq k$).

Das ergibt 128 Summanden; wir fassen sie zuerst nach den Koeffizienten α_o, α_{ik}, α_{iklm}, α' zusammen. Sie lassen sich dann weiter zusammenfassen und wir erhalten

$$4 \times u_1 u_2 = \sum_{i=1}^{4} y_i \eta_i \quad \text{mit } \eta_i = \gamma_i + j_o \delta_i \in K,$$

wobei

$$y_1 = j_o + a_1^{-1} e_1e_4 + a_2^{-1} e_2e_5 - a_3^{-1} e_3e_6 ,$$

$$y_2 = e_1e_5 - e_2e_4 - a_3^{-1}e_1e_2e_3e_6 - (\rho a_3)^{-1}e_3e_4e_5e_6,$$

$$y_3 = e_2e_6 + e_3e_5 - a_1^{-1}e_1e_2e_3e_4 + (\rho a_1)^{-1}e_1e_4e_5e_6,$$

$$y_4 = e_1e_6 + e_3e_4 + a_2^{-1}e_1e_2e_3e_5 - (\rho a_2)^{-1}e_2e_4e_5e_6;$$

$$\gamma_1 = a_1a_2a_3(\alpha' + \alpha_{14} + \alpha_{25} - \rho a_1a_2 \alpha_{36}),$$

$$\delta_1 = \rho^{-1}a_1 \alpha_o + a_2^2a_3 \alpha_{1346} - a_1^2a_2 \alpha_{1245} + a_1a_2a_3 \alpha_{2356},$$

$$\gamma_2 = \alpha_{15} - \alpha_{24} - a_3 \alpha_{1236} - \rho a_3 \alpha_{3456},$$

$$\delta_2 = \rho^{-1} \alpha_{12} + \alpha_{45} + a_3 \alpha_{1356} - a_3 \alpha_{2346},$$

$$\gamma_3 = \alpha_{26} + \alpha_{35} - a_1 \alpha_{1234} + \rho a_1 \alpha_{1456},$$

$$\delta_3 = \alpha_{56} - a_1 \alpha_{1246} - a_1 \alpha_{1345} - \rho \alpha_{23},$$

$$\gamma_4 = \alpha_{16} + \alpha_{34} + a_2 \alpha_{1235} - \rho a_2 \alpha_{2456},$$

$$\delta_4 = \alpha_{46} - \rho \alpha_{13} + a_2 \alpha_{1256} + a_2 \alpha_{2345}$$

ist.

Also ist $\dim_K L = 4$, denn die Elemente y_1, y_2, y_3, y_4 aus C_6^+ sind offenbar linear unabhängig auch über K.

$L = \{xu_1u_2 : x \in C_6^+(k,f)\}$ ist ersichtlich ein Linksideal in C_6^+ . Der Isomorphismus $C_6^+(k,f) \cong M_4(K)$ folgt nun unmittelbar : man ordne jedem Element $t \in C_6^+$ die Abbildung

$$\psi(t) : y \to ty \quad (y \in L)$$

von L in sich zu, die offenbar ein Endomorphismus des Vektorraumes L ist. Die Darstellung

$$\psi : C_6^+(k,f) \to \mathrm{End}_K L \cong M_4(K) , \quad t \to \psi(t),$$

hat nun den Kern 0, weil C_6^+ einfach über seinem Zentrum K ist ([4] ,p.148). D.h. ψ ist injektiv; aus Dimensionsgründen also auch surjektiv.

Es bezeichne J die kanonische Involution der Cliffordalgebra, die auf den Basiselementen durch

$$(e_{i_1} \cdots e_{i_r})^J = e_{i_r} \cdots e_{i_1}, \quad i_1 < \ldots < i_r,$$

definiert ist. Für die Produkte $y_i^J y_k$ findet man nun :

$$y_1^J y_1 = -4\rho(1 + (a_1 j_o)^{-1} e_1e_4 + (a_2 j_o)^{-1} e_2e_5 - (a_3 j_o)^{-1} e_3e_6),$$

$$y_2^J y_2 = 4(-\rho a_1a_2 + e_1e_2e_4e_5 + a_3^{-1}a_1e_2e_3e_5e_6 + a_3^{-1}a_2e_1e_3e_4e_6),$$

$$y_3^J y_3 = 4(-\rho a_2a_3 + e_2e_3e_5e_6 + a_1^{-1}a_2e_1e_3e_4e_6 - a_1^{-1}a_3e_1e_2e_4e_5),$$

$$y_4^J y_4 = 4(-\rho a_3a_1 - e_1e_3e_4e_6 + a_2^{-1}a_1e_2e_3e_5e_6 - a_2^{-1}a_3e_1e_2e_4e_5);$$

dagegen gilt, $y_1^J y_2 = y_1^J y_3 = y_1^J y_4 = y_2^J y_3 = y_2^J y_4 = y_3^J y_4 = 0$,

also auch $y_2^J y_1 = y_3^J y_1 = y_4^J y_1 = y_3^J y_2 = y_4^J y_2 = y_4^J y_3 = 0$.

Mit $S(x)$ bezeichnen wir den in K gelegenen Summanden von $x \in C_6^+(k,f)$, d.h. $S(x) = \alpha_o + \alpha' j$. Für $y = \sum_{i=1}^{4} y_i \eta_i$ und $z = \sum_{i=1}^{4} y_i \xi_i$ aus L gilt, wegen $S(y_i^J y_j) = 0$, für $i \neq j$,

$$S(y^J z) = \sum_{i=1}^{4} S(y_i^J y_i)\, \bar{\eta}_i \xi_i$$

Es ist $S(y_i^J y_i)$ für jedes $1 \leqslant i \leqslant 4$, sogar in k^* gelegen. Es ist nun klar, dass durch $(y,z) \to S(y^J z)$ eine hermitesche Bilinearform auf L über K definiert ist [1]. Es ist $-(4\rho)^{-1} S(z^J z)$

$$= h(z) = \bar{\xi}_1 \xi_1 + a_1 a_2\, \bar{\xi}_2 \xi_2 + a_2 a_3\, \bar{\xi}_3 \xi_3 + a_3 a_1\, \bar{\xi}_4 \xi_4;$$

wir nennen h die zur quadratischen Form gehörige hermitesche Form. Sie hat die Diskriminante $(a_1 a_2 a_3)^2 \equiv 1 \bmod N_{K/k}(K^*)$ und ist anisotrop, denn die Isotropie von h hätte die Isotropie von f zur Folge ([9], p.213).

Die unitäre Gruppe von h können wir nun als die Untergruppe $\{t \in C_6^+(k,f) : t^J t = 1\}$ der multiplikativen Gruppe der Cliffordalgebra $C_6^+(k,f) \cong M_4(K)$ ermitteln. Jedes $t \in C_6^+$ mit $t^J t = 1$ liefert offenbar eine Isometrie $\psi(t)$ von L, denn es ist dann $S((tz)^J(tz)) = S(z^J . t^J t . z) = S(z^J z)$ für alle $z \in L$. Das sind aber auch alle Elemente von $C_6^+(k,f)$, die Isometrien von L liefern, denn für ein $t \in C_6^+$ mit $t^J t \neq 1$ kann $S((ty_i)^J(ty_i)) = S(y_i^J y_i)$ für jeden der Basisvektoren

---

[1] Man beachte, daß $J|K$ der nicht-identische Automorphismus von K über k ist.

y_1, y_2, y_3, y_4 von L nicht gelten, wie man sich leicht überzeugt. Also ist

$$U_4(K,h) \cong \{ t \in C_6^+(k,f) : t^J t = 1 \} .$$

Wenn wir unter det t, für $t \in C_6^+$, sinngemäss det $\nu(t)$ verstehen, so haben wir

$$U_4^+(K,h) \cong \{ t \in C_6^+(k,f) \cong M_4(K) : t^J t = 1, \det t = 1 \}.$$

5.2 Zum Isomorphismus $U_4^+(K,h) \cong \mathrm{Spin}_6(k,f)$

Wir wollen beweisen, dass die eigentlich unitäre Gruppe von h zur Spingruppe von f isomorph ist. Dabei ist es zweckmässig, die hermitesche Form zunächst zu vergessen und $U_4(k) = \{ t \in C_6^+(k,f) : t^J t = 1 \}$ und $U_4^+(k) = \{ t \in U_4(k) : \det t = 1 \}$ lediglich als Bezeichnungen einzuführen. Die Spingruppe ist definiert durch

$$\mathrm{Spin}_6(k,f) = \{ t \in C_6^+ : txt^{-1} \in V \text{ für alle } x \in V, \ t^J t = 1 \}.$$

Für $n \geq 6$ gibt es keine brauchbare Kennzeichnung der Elemente $t \in C_n^+$, für die $txt^{-1} \in V$ gilt, für alle $x \in V$. Man kann im Fall $n = 6$ immerhin einen Homomorphismus

$$\varphi : U_4(k) \longrightarrow GO_6^+(k,f) \times K^* / \{(\alpha,\alpha) : \alpha \in k^*\},$$

wobei GO_6^+ die Gruppe der eigentlichen Homometrien (Ähnlichkeitstransformationen) von f bezeichnet, konstruieren, aus dem die Gleichheit

$$U_4^+(k) = Spin_6(k,f)$$

hergeleitet werden kann. Die unten angegebene Konstruktion befindet sich im wesentlichen bei Eichler [10], p.34.

Für ein invertierbares $t \in C_6^+$ ist txt^{-1}, für ein beliebiges $x \in V$, eine Summe von Elementen, die Produkte ungerader Anzahlen von Vektoren aus V sind. Gilt $tt^J=1$, so ist $(txt^{-1})^J = (t^J)^{-1}xt^J = txt^{-1}$. Es können also in txt^{-1} nur solche Summanden vorkommen, die bei der Wirkung von J das Vorzeichen nicht ändern. Das sind die Vektoren aus V und die Produkte von 5 Vektoren aus V. Ein Produkt der letzten Art kann man als zj $(j= e_1e_2e_3e_4e_5e_6)$, mit einem Vektor $z \in V$, schreiben.

Geht man also von einem $t \in U_4(k)$ aus, so gibt es zu jedem $x \in V$ zwei Vektoren y,z, so dass gilt :

$$txt^{-1} = y + zj$$

Durch Quadrieren folgt hieraus, $j(yz-zy)= 0$, also $yz = zy$, weil y^2,z^2,x^2,j^2 alle in k liegen. Dann gilt weiter $z = \eta y$, mit einem $\eta \in k$, weil sonst $yz \neq zy$ wäre. Somit hat man

$$txt^{-1} = y + \eta yj = (1- \eta j)y = \mu_t^{-1} y,$$

wobei $\mu_t= \mu_0+ \mu_1 j \in K^*$ $(\mu_0,\mu_1 \in k)$ angesetzt werde. Da $j^2 = -d$ keine Quadratzahl in k^* ist, ist dieser Ansatz sinnvoll (Es gilt $\mu_0=(1 + \eta^2 d)^{-1}$, $\mu_1= \eta(1 + \eta^2 d)^{-1}$). Wir zeigen nun, dass für zwei Vektoren $x,\hat{x} \in V$, die

gemäss den Gleichungen $txt^{-1} = \mu_t^{-1} y$ und $\hat{t}\hat{x}\hat{t}^{-1} = \hat{\mu}_t^{-1} \hat{y}$ gehörigen Zahlen μ_t, $\hat{\mu}_t \in K^*$ sich nur um einen Faktor aus k^* unterscheiden. Denn, es ist

$$\begin{aligned} 2\, f(x,\hat{x}) &= t(x\hat{x} + \hat{x}x)t^{-1} = txt^{-1}\hat{t}\hat{x}\hat{t}^{-1} + \hat{t}\hat{x}\hat{t}^{-1}txt^{-1} \\ &= \mu_t^{-1}\, y\, \hat{\mu}_t^{-1}\hat{y} + \hat{\mu}_t^{-1}\, \hat{y}\, \mu_t^{-1} y \\ &= \mu_t^{-1}\, \bar{\hat{\mu}}_t^{-1}\, y\hat{y} + \bar{\mu}_t^{-1}\, \hat{\mu}_t^{-1}\, \hat{y}y; \end{aligned}$$

(wegen $\hat{y}\mu_t^{-1} = \bar{\mu}_t^{-1}\hat{y}$; $\bar{\hat{\mu}}_t$ bezeichnet natürlich $(\hat{\mu}_t)^J$).. Die rechte Seite ist nur dann in k gelegen, wenn gilt :

$$\mu_t^{-1}\, \bar{\hat{\mu}}_t^{-1} = \bar{\mu}_t^{-1}\, \hat{\mu}_t^{-1} \text{ , oder } (\mu_t : \hat{\mu}_t)^{-1} = ((\mu_t : \hat{\mu}_t)^{-1})^J.$$

Das Verhältnis $(\mu_t : \hat{\mu}_t)^{-1}$ ist also eine Zahl aus k^*; es sei $\mu_t : \hat{\mu}_t = \alpha$, also $\hat{\mu}_t^{-1} = \alpha\, \mu_t^{-1}$. Ersetzen wir nun $\hat{y}$ durch $\alpha\hat{y}$, so gilt $t\hat{x}t^{-1} = \mu_t^{-1}\hat{y}$. Wir können also μ_t ein für allemal fest wählen; es gilt dann $txt^{-1} = \mu_t^{-1} y$ für jedes $x \in V$, mit einem geeigneten $y \in V$. Ferner gilt für $x,\hat{x}$ (mit modifiziertem $\hat{y}$)

$$f(y,\hat{y}) = \mu_t \bar{\mu}_t\, f(x,\hat{x}) = N_{K/k}(\mu_t)\, f(x,\hat{x}).$$

Die vermöge der Gleichung $txt^{-1} = \mu_t^{-1} y$ definierte Abbildung $u_t : x \to y$ von V auf sich, ist somit eine Homometrie (Ähnlichkeitstransformation). Sie ist eigentlich (im Sinne von [10] , p.19), denn sie lässt, gemäss

$$u_t(e_1 \ldots e_{2r}) = (N\mu_t)^{-r}\, u_t(e_1) \ldots u_t(e_{2r})$$

auf C_6^+ erweitert, das Zentrum K von C_6^+ elementweise fest.

Somit hat man die folgende Konstruktion :

Man gehe von $t \in U_4(k)$ aus; suche die zu einem beliebigen Vektor $x_o \neq 0$ aus V, gemäss der Gleichung

(i) $$tx_o t^{-1} = y_o + \eta\, y_o j = \mu_t^{-1}\, y_o$$

gehörige Zahl $\mu_t \in K^*$ auf und halte sie dann fest. Dann wird durch die Gleichung

$$txt^{-1} = \mu_t^{-1} y \quad \text{für jedes} \quad x \in V,$$

eine eigentliche Homometrie $u_t: x \to y$ von V gegeben.

Jedem $t \in U_4(k)$ hat man damit ein Paar

$$(u_t, \mu_t) \quad \text{aus} \quad GO_6^+(k,f) \times K^*$$

zugeordnet. Wir haben gleichzeitig erkannt, dass μ_t nur durch $\alpha\mu_t$, mit $\alpha \in k^*$, ersetzt werden kann; dann ist zugleich u_t durch $\alpha u_t: x \to \alpha y$ zu ersetzen. Somit erhalten wir eine wohl-definierte Abbildung

$$\varphi : U_4(k) \longrightarrow GO_6^+(k,f) \times K^*/\{(\alpha,\alpha): \alpha \in k^*\},$$

die in der Tat ein Homomorphismus ist. Denn, ist für $t \in U_4(k)$, μ_t gemäss (i) definiert, so werde für ein $s \in U_4(k)$, μ_s gemäss $sy_o s^{-1} = \mu_s^{-1} z_o$ definiert; dann ist $(st)x_o(st)^{-1} = s(\mu_t^{-1} y_o)s^{-1} = \mu_t^{-1}\mu_s^{-1} z_o = (\mu_s\mu_t)^{-1} z_o$. Es ist sinnvoll μ_{st} durch die Gleichung

$$(st)x_o(st)^{-1} = \mu_{st}^{-1} z_o \quad \text{zu definieren, so dass}$$

$\mu_{st} = \mu_s \mu_t$ gilt. Für beliebiges $x \in V$ ist dann,

$$(st)x(st)^{-1} = \mu_{st}^{-1}\, z,$$

wenn $txt^{-1} = \mu_t^{-1} y$ und $sys^{-1} = \mu_s^{-1} z$ ist. Also ist $u_{st}(x) = z = u_s u_t(x)$, das heisst, $u_{st} = u_s u_t$.

Die Homomorphieeigenschaft von φ ist nun klar.

Unser Ziel war es, die Gleichheit $U_4^+(k) = \mathrm{Spin}_6(k,f)$ zu beweisen. Zu diesem Zweck betrachten wir die ganze Angelegenheit über der separablen algebraisch abgeschlossenen Hülle $\hat{k}$ von k. Wir müssen uns zuerst überlegen, wie die Cliffordalgebra $C_6^+(\hat{k},f)$ von f über $\hat{k}$ aussieht.

Das Zentrum von $C_6^+(k,f)$ ist $k + kj$; die Summe ist dabei eine direkte. Über $\hat{k}$ ist das Zentrum also $\hat{k} \oplus \hat{k}$. $C_6^+(\hat{k},f)$ ist einfach über seinem Zentrum. Es muss also $C_6^+(\hat{k},f)$ die direkte Summe zweier voller Matrizenringe über $\hat{k}$ sein. Schon aus Dimensionsgründen sieht man, dass gilt :

$$C_6^+(\hat{k},f) \cong M_4(\hat{k}) \oplus M_4(\hat{k}).$$

Ist $t \in C_6^+(\hat{k},f)$, so schreiben wir $t = (t_1,t_2)$, wobei (t_1,t_2) das Bild von t in $M_4(\hat{k}) \oplus M_4(\hat{k})$ bei einem Isomorphismus ist. Unter det t wollen wir dann $(\det t_1, \det t_2)$ verstehen. Somit können wir über $\hat{k}$ sinngemäss festsetzen :

$$U_4(\hat{k}) = \{t \in C_6^+(\hat{k},f) : t^J t = 1\},$$

$$U_4^+(\hat{k}) = \{t \in U_4(\hat{k}) : \det t = 1\}.$$

Wir können sodann zeigen, dass $U_4(\hat{k}) \cong GL_4(\hat{k})$ und $U_4^+(\hat{k}) \cong SL_4(\hat{k})$ gilt.

Die Wirkung von J auf $C_6^+(\hat{k},f)$ ist gegeben durch $(t_1,t_2)^J = (t_2^J, t_1^J)$ für $t = (t_1,t_2)$ aus $C_6^+(\hat{k},f)$. Denn J ist nicht die Identität auf dem Zentrum $\hat{k} \oplus \hat{k}$ und der einzige nicht-identische Automorphismus von $\hat{k} \oplus \hat{k}$, der $\hat{k}$ elementweise festlässt, besteht in der Vertauschung

der beiden Komponenten. Die Gleichung $t^J t = 1$ ist also gleichwertig mit $t_2^J t_1 = 1$. Dann ist also t_1 invertierbar und t_2 vermöge $t_2^J t_1 = 1$ bereits durch t_1 bestimmt. Umgekehrt ist die zu einem $t_1 \in GL_4(\hat{k})$ gemäss $t_2^J t_1 = 1$ verbundene Matrix ebenfalls invertierbar; für $t = (t_1, t_2)$ gilt dann $t^J t = 1$. Dies zeigt, $U_4(\hat{k}) \cong GL_4(\hat{k})$. Gilt zusätzlich $\det t = 1$, das heisst $(\det t_1, \det t_2) = (1,1)$, so ist $\det t_1 = 1$; umgekehrt gilt für die zu gegebenem $t_1 \in SL_4(\hat{k})$ gemäss $t_2^J t_1 = 1$ verbundene Matrix ebenfalls $\det t_2 = 1$. Damit ist $U_4^+(\hat{k}) \cong SL_4(\hat{k})$ bewiesen.

Wegen dieses Sachverhaltes ist die Gleichheit $U_4^+(k) = U_4^+(\hat{k}) \cap C_6^+(k,f)$ nun ersichtlich.

Für die Spingruppe entnimmt man den Definitionen und der Isomorphie $C_6^+(\hat{k},f) \cong C_6^+(k,f) \otimes_k \hat{k}$ ([4], p.141) sofort die Gleichheit $Spin_6(k,f) = Spin_6(\hat{k},f) \cap C_6^+(k,f)$.

Wir sehen also, dass es genügt die Gleichheit $U_4^+(\hat{k}) = Spin_6(\hat{k},f)$ zu beweisen. Dann gilt auch

$$U_4^+(k) = Spin_6(k,f).$$

Es gilt nun, $U_4^+(\hat{k}) = Spin_6(\hat{k},f)$ zu beweisen. Eben wurde $U_4(\hat{k}) \cong GL_4(\hat{k})$ und $U_4^+(\hat{k}) \cong SL_4(\hat{k})$ bewiesen. Also ist $U_4^+(\hat{k})$ die Kommutatorgruppe von $U_4(\hat{k})$; ebenso ist $O_6^+(\hat{k}) = \Omega_6(\hat{k},f)$ die Kommutatorgruppe von $GO_6^+(\hat{k})$, denn es gilt $O_6^+(\hat{k}) = \Omega_6(\hat{k})$, ([17], p.156).

Betrachten wir nun den Homomorphismus φ über $\hat{k}$,

$$\varphi : U_4(\hat{k}) \to GO_6^+(\hat{k},f) \times \hat{K}^*/\{(\alpha,\alpha): \alpha \in \hat{k}\}$$

so sehen wir, dass $U_4^+(\hat{k})$ in $O_6^+(\hat{k},f)$ abgebildet wird; denn $O_6^+(\hat{k},f)$ ist die Kommutatorgruppe der rechts stehenden Gruppe. Dies bedeutet, für jedes t aus $U_4^+(\hat{k})$ ist die Homometrie $u_t: x \to y = txt^{-1}$ sogar eine (eigentliche) Isometrie von $\hat{V} = V \otimes \hat{k}$. Das heisst aber, $U_4^+(\hat{k}) \subseteq Spin_6(\hat{k},f)$. Somit haben wir

$$U_4^+(\hat{k}) \subseteq Spin_6(\hat{k},f) \subseteq U_4(\hat{k}).$$

Bilden wir die Kommutatorgruppen, so folgt

$$U_4^+(\hat{k}) \subseteq Spin_6(\hat{k},f) \subseteq U_4^+(\hat{k}),$$

weil $U_4^+(\hat{k}) \cong SL_4(\hat{k})$ und $Spin_6(\hat{k},f)$ beide gleich ihrer Kommutatorgruppen sind. Für $U_4^+(\hat{k})$ folgt dies aus der Fasteinfachheit von $SL_4(\hat{k})$, ([6],p.39). $Spin_6(\hat{k})$ wird durch die Spingruppen aller 3-dimensionalen Unterräume erzeugt, denn

$$Spin_6(\hat{k})/\{\pm 1\} \cong O_6'(\hat{k}) = \Omega_6(\hat{k}) \quad \text{ist}$$

fasteinfach. $Spin_3(\hat{k})$ ist aber fasteinfach, also seine eigene Kommutatorgruppe, denn es gilt $Spin_3(\hat{k}) \cong SL_2(\hat{k})$, ([6], p. 57). Folglich ist auch $Spin_6(\hat{k})$ seine eigene Kommutatorgruppe.

Damit ist die Gleichheit $U_4^+(\hat{k}) = Spin_6(\hat{k},f)$, also auch $U_4^+(k) = Spin_6(k,f)$ vollständig bewiesen.

Wir errinern an die Isomorphie

$$O_6'(k,f) \cong \mathrm{Spin}_6(k,f)/\{\pm 1\},$$

die dadurch entsteht, dass man jedem $t \in \mathrm{Spin}_6$ die eigentliche Isometrie $x \to txt^{-1}$ von V zuordnet. Errinern wir uns nun an das Ergebnis (ii) von §5.1, so haben wir als Endresultat

$$U_4^+(K,h)/\{\pm 1\} \cong O_6'(k,f).$$

Jede vorgegebene anisotrope hermitesche Form h in 4 Variablen über einer gegebenen quadratischen Erweiterung $D = k(\sqrt{\rho})$, mit der Diskriminante 1, lässt sich durch Multiplikation mit einer geeigneten Zahl aus k^* in die Gestalt

$$h(z) = \xi_1\bar{\xi}_1 + a_1a_2\xi_2\bar{\xi}_2 + a_2a_3\xi_3\bar{\xi}_3 + a_3a_1\xi_4\bar{\xi}_4$$

mit gewissen $a_1, a_2, a_3 \in k^*$ bringen, und dann auf die oben geschilderte Weise aus der quadratischen Form (1) wiedergewinnen.

Als Ergebnis notieren wir den

SATZ 2.

Es sei D eine quadratische Erweiterung von k und h eine anisotrope hermitesche Form in 4 Variablen über D mit der Diskriminante 1. Dann gibt es eine ebenfalls anisotrope quadratische Form f in 6 Variablen über k, derart dass zwischen der unitären und orthogonalen Gruppen ein Isomorphismus

$$U_4^+(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_6'(k,f) \qquad \text{besteht.}$$

§ 6. Isogenie zwischen U_2 (Fall II) und O_5.

Die Konstruktion ist ganz analog zu der in §5, jedoch sehr viel einfacher.

Es sei f eine anisotrope quadratische Form auf einem 5-dimensionalen Vektorraum V über k; es gebe aber eine quadratische Erweiterung $K = k(\omega)$ von k, derart dass f auf $V_K = V \underset{k}{\otimes} K$ den Index 2 hat. Dann lässt sich f, in bezug auf eine geeignete Basis von V, in die Gestalt

$$(1) \qquad f(x) = a_1\xi_1^2 + a_4\xi_4^2 - a_2\xi_2^2 - a_5\xi_5^2 + \xi_3^2 \quad (a_i \in k^*)$$

bringen, wobei $-\frac{a_4}{a_1} = -\frac{a_5}{a_2} = \eta = \omega^2$ gilt.

Mit C_k^+ bzw. C_K^+ bezeichnen wir die spezielle Cliffordalgebra von f über k bzw. K.

Es sei $e_1,\ldots,e_5$ eine Orthogonalbasis von V, in bezug auf die f die Gestalt (1) annimmt. In der Cliffordalgebra gilt also,

$$e_1^2 = a_1, \quad e_2^2 = -a_2, \quad e_3^2 = 1,$$
$$e_4^2 = -\eta a_1, \quad e_5^2 = \eta a_2.$$

Die durch die Gleichungen

$2u_1 = 1 + (\omega a_1)^{-1} e_1 e_4$, $2u_2 = 1 + (\omega a_2)^{-1} e_2 e_5$

definierten Elemente u_1, u_2 von C_K^+ sind idempotent und miteinander vertauschbar. Es ist

$$4u_1u_2 = 1 + (\omega a_1)^{-1} e_1 e_4 + (\omega a_2)^{-1} e_2 e_5 - (\eta a_1 a_2)^{-1} e_1 e_2 e_4 e_5.$$

Genau wie in §5, betrachten wir das Linksideal $L = C_K^+ u_1 u_2 = \{ x u_1 u_2 : x \in C_K^+ \}$ in C_K^+ und behaupten, dass $\dim_K L = 4$ ist.

Das allgemeine Element $x \in C_K^+$ hat die Gestalt

$$x = \alpha_o + \sum_{i<j} \alpha_{ij} e_i e_j + \sum_{i<j<k<l} \alpha_{ijkl}\, e_i e_j e_k e_l$$

$$(i,j,k,l = 1,\ldots,5;\ \alpha_o, \alpha_{ij}, \alpha_{ijkl} \in K).$$

Wir multiplizieren das Produkt $4xu_1u_2$ vollständig aus und erhalten 64 Glieder, die wir zuerst nach den Koeffizienten α_o, α_{ij}, α_{ijkl} zusammen. Die Summanden lassen sich dann weiter zusammenfassen und wir erhalten :

$$4xu_1u_2 = \sum_{i=1}^{4} y_i \eta_i, \quad \text{wobei}$$

$$y_1 = \omega e_1 e_2 - e_1 e_5 - e_2 e_4 - \omega^{-1} e_4 e_5 ,$$

$$y_2 = \eta e_1 e_3 - \omega e_3 e_4 - \omega a_2^{-1} e_1 e_2 e_3 e_5 - a_2^{-1} e_2 e_3 e_4 e_5,$$

$$y_3 = \omega a_1 a_2 + a_2 e_1 e_4 + a_1 e_2 e_5 - \omega^{-1} e_1 e_2 e_4 e_5,$$

$$y_4 = e_1 e_3 e_4 e_5 - \omega a_1 e_3 e_5 - \omega e_1 e_2 e_3 e_4 - \eta a_1 e_2 e_3;$$

und

$$\eta_1 = \omega^{-1}\alpha_{12} - \alpha_{15} - \alpha_{24} - \omega\alpha_{45},$$

$$\eta_2 = \eta^{-1}\alpha_{13} - \omega\alpha_{34} - a_2\alpha_{2345} - \omega^{-1}a_2\alpha_{1235},$$

$$\eta_3 = (\omega a_1 a_2)^{-1}\alpha_o + a_2^{-1}\alpha_{14} + a_1^{-1}\alpha_{25} - \omega\alpha_{1245},$$

$$\eta_4 = \alpha_{1345} - (\eta a_1)^{-1}\alpha_{23} - (\omega a_1)^{-1}\alpha_{35} - \alpha_{1234}\cdot\omega^{-1}$$

ist. Damit ist $\dim_K L = 4$ nachgewiesen.

Ordnen wir jedem $t \in C_K^+$ den Endomorphismus von L,

$$\psi(t) : x \to tx, \quad x \in L,$$

zu, so hat die Darstellung $\psi : t \to \psi(t)$ den Kern 0, weil $C_5^+(K,f)$ zentral und einfach ist ([6] ,p. 53). Daraus folgt der Isomorphismus $C_K^+ \cong M_4(K)$. Dies kann man auch direkt leicht zeigen; es ist nämlich C_K^+ das Tensorprodukt zweier Quaternionenalgebren über K, die beide zerfallen (Eichler [10] , p.33).

Der Teilraum $D = K + K.e_1e_2 = k + k.e_1e_4 + k.e_1e_2 + k.e_2e_4$ von C_k^+ ist nun ersichtlich isomorph zur Quaternionenalgebra $(\eta,\alpha)_k$ mit $\alpha = a_1a_2$ $(\eta = -\frac{a_4}{a_1})$. Man beachte, dass der Teilraum $k + k.e_1e_4$ zu K isomorph ist (als Körper); auf diese Weise ist K in C_k^+ enthalten.

Es gilt nun, $y_3 = e_1e_2y_1$ und $y_4 = e_1e_2y_2$. Somit ist L 2-dimensional über D. D ist nullteilerfrei, weil f anisotrop war; denn $(\eta,\alpha)_k$ enthält Nullteiler genau dann, wenn $\alpha \in N_{K/k}(K)$ ist; dann wäre aber f isotrop.

Die hermitesche Form lässt sich genau wie in § 5 konstruieren. Für $y,z \in L$ werde der in k gelegene Summand im Produkt $y^J z$ mit $S(y^J z)$ bezeichnet. Für die Basisvektoren y_1, y_2 von L über D findet man,

$$y_1^J y_1 = 4(\eta a_1 a_2 - \omega a_1 e_2 e_5 - \omega a_2 e_1 e_4 - e_1 e_2 e_4 e_5),$$

$$y_2^J y_2 = 4(-\eta a_1 a_2^2 - \omega a_1 a_2 e_2 e_5 + \omega a_2^2 e_1 e_4 - a_2 e_1 e_2 e_4 e_5);$$

dagegen enthalten $y_1^J y_2$ und $y_2^J y_1$ keinen in k, nicht mal in D, gelegenen Summanden, wie man auch augenscheinlich wahrnimmt. Beachtet man nun, dass die Restriktion der kanonischen Involution J der Cliffordalgebra auf $D \subset C_k^+$ gerade die Standardinvolution der Quaternionenalgebra D ist, so ist klar, dass durch $z \to S(z^J z)$ eine J-hermitesche Form auf L über D definiert wird. Bis auf den Skalarfaktor $-(4\eta a_1 a_2)^{-1} \in k^*$ ist dies die Form

(iii) $h(z) := -\xi_1 \bar{\xi}_1 + a_2 \xi_2 \bar{\xi}_2 \quad (z = \xi_1 y_1 + \xi_2 y_2 \in L)$,

h ist anisotrop, weil f es war ([9], p.222)

Die unitäre Gruppe von h lässt sich nun leicht ermitteln. Wir fassen C_k^+ als Unteralgebra von C_K^+ auf (vermöge $C_k^+ \to C_k^+ \otimes 1$), und sehen, ähnlich wie in § 5, dass alle Elemente t aus C_k^+ mit $t^J t = 1$ und nur diese, Isometrien des hermiteschen Raumes L liefern. Also ist,

$$U_2(D,h) = \{ t \in C_5^+(k,f) : t^J t = 1 \}.$$

Bis zur Dimension 5 ist die Forderung, $txt^{-1} \in V$ für alle $x \in V$, für ein Element $t \in C_n^+$ mit $t^J t \in k^*$, automatisch erfüllt (Artin [2], p.197, Eichler [10], p.33). Das heisst, $Spin_5(k,f) = \{ t \in C_5^+(k,f) : t^J t = 1 \}$. Also haben wir einen Isomorphismus $U_2(D,h) \cong Spin_5(k,f)$. Folglich gilt, $U_2(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_5'(k,f)$.

Jede vorgegebene anisotrope J-hermitesche Form in 2 Variablen über einem Quaternionenschiefkörper D über k, lässt sich auf die obige Weise aus einer quadratischen Form wiedergewinnen. Denn, ist etwa $D = (c,d)_k$ und $h(z) = -\xi_1\bar{\xi}_1 + a_2\xi_2\bar{\xi}_2$ mit $c,d,a_2 \in k^*$, so setze man $a_1 = \frac{d}{a_2}$, $a_4 = -\frac{c}{a_1}$; dann ist $D = (-\frac{a_4}{a_1}, a_1a_2)$. Alsdann definiere man a_2, a_5 durch $\frac{a_4}{a_1} = \frac{a_5}{a_2}$ und die quadratische Form f durch die Gleichung (1).

Als Ergebnis haben wir somit den

SATZ 3. (Vgl. Dieudonné [9], p.222)

Es sei D ein Quaternionenschiefkörper über k und h eine anisotrope J-hermitesche Form in 2 Variablen über D. Dann gibt es eine ebenfalls anisotrope quadratische Form in 5 Variablen über k derart, dass zwischen der unitären und orthogonalen Gruppen ein Isomorphismus

$$U_2(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_5'(k,f) \quad \text{besteht.}$$

§ 7. Bestimmung der Kommutatorgruppe (in den Fällen I,II)

Von jetzt ab sei wieder k ein algebraischer Zahlkörper, D eine quadratische Erweiterung von k oder ein Quaternionenschiefkörper über k. Es sei V ein anisotroper J-hermitescher Raum über D; h bezeichne die auf V aufgeprägte hermitesche Form.

Unser Ziel in diesem Paragraphen ist es, die Kommutatorgruppe der unitären Gruppe in diesen beiden Fällen zu bestimmen. Der Beweis geschieht jeweils durch Induktion nach der Dimension, beginnend mit $n = 2$ im Fall II bzw. im Fall I mit dem 4-dimensionalen Sonderfall, dass die Diskriminante $d(V) = 1$ ist.

Mit diesen Bezeichnungen gilt das

T h e o r e m B.

I) Für $n = 4$, $d(V) = 1$, oder für $n \geq 5$ gilt im Fall I, $U_n'(D,h) = U_n^+(D,h)$.

II) Für $n \geq 2$ gilt im Fall II, $U_n'(D,h) = U_n(D,h)$.

Beweis. 1. Es sei $n = 4$, $d(V) = 1$ im Fall I bzw. $n = 2$ im Fall II.

Dann haben wir auf Grund der in §5 bzw. §6 bewiesenen Isomorphie $U_4^+(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_6'(k,f)$ bzw.

$U_2(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_5'(k,f)$, der Gleichheit $O_m' = \Omega_m$ und der Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe Ω_m von O_m (für $m \geqslant 5$; Satz B bzw. Satz C in [12], oder [6], chap. II, §12) nur noch zu zeigen, dass -1 ein Kommutator in U_4^+ bzw. U_2 ist. Denn Ω_m ist (für $m \geqslant 5$) wegen seiner Fasteinfachheit, seine eigene Kommutatorgruppe, also $U_4^+/\{\pm 1\}$ bzw. $U_2/\{\pm 1\}$ auch.

Um -1 als Kommutator darzustellen, nehmen wir eine Ebene (Fall I) bzw. eine Gerade (Fall II) P in V, die zu ihrem orthogonalen Komplement $P^\perp$ isometrisch ist. Den Existenznachweis für P werden wir gleich nachholen. Es sei also $P = \langle x \rangle$ bzw. $P = \langle x,z \rangle$ und

$P^\perp = \langle y \rangle$ bzw. $P^\perp = \langle y,z' \rangle$ im Fall II

bzw. I angesetzt, mit $h(x) = h(y)$, $h(x,y) = 0$, und

$h(z) = h(z')$, $h(x,z) = h(y,z') = 0$.

Dann ist $P \cong P^\perp$; es ist $u = {}^{-1}s_{x-y}$ bzw. $u = {}^{-1}s_{x-y}\,{}^{-1}s_{z-z'}$ eine eigentliche Isometrie (auch im Fall II), die P in $P^\perp$ überführt. Sei nun v die folgendermassen definierte Isometrie von V,

$$v|P = -1, \quad v|P^\perp = 1.$$

v, ebenso u, ist eigentlich auch im Fall II, weil dann -1 ein Kommutator in D^* ist. Es gilt nun offenbar :

$$uvu^{-1}|P = 1 \quad \text{und} \quad uvu^{-1}|P^\perp = -1,$$

d.h. $uvu^{-1} = -v$. Somit ist $-1 = uvu^{-1}v^{-1}$ als Kommutator in $U_4^+(D,h)$ bzw. $U_2(D,h)$ dargestellt.

2. Zur Konstruktion von P betrachten wir zuerst den Fall I. Sei $\xi = h(x)$ beliebig aus $h(V)^*$. Aus dem HASSE-Prinzip folgt dann die Existenz eines Vektors y aus $\langle x\rangle^\perp$ mit $h(y) = h(x)$. Zu prüfen ist die lokale Darstellbarkeit von ξ an einer unzerlegten Primstelle $\mathfrak{p} \in P_\infty^r(k)$, wo $\langle x\rangle_\mathfrak{p}^\perp$ definit ist. Wegen $d(V) = 1$ und $h(x) = \xi$ ist $d(\langle x\rangle^\perp) \equiv \xi^{-1} \equiv \xi \bmod k^{*2}$; folglich ist ξ als Produkt von $3 = \dim \langle x\rangle^\perp$ Formenwerten > 0 oder < 0, je nach dem, ob $\langle x\rangle_\mathfrak{p}^\perp$ positiv oder negativ definit ist. Also wird ξ in $\langle x\rangle_\mathfrak{p}^\perp$ dargestellt.

Damit ist die Existenz eines Vektors y in $\langle x\rangle^\perp$ mit $h(y) = h(x)$ gesichert. Es sei nun P eine Ebene in V, die x, nicht aber y, enthält. Wegen $d(V) = 1$ ist $d(P^\perp) = d(P)^{-1} \equiv d(P) \bmod k^{*2}$. Man kann also orthogonale Vektoren $z \in P$, $z' \in P^\perp$ finden, derart dass $P = \langle x,z\rangle$, $P^\perp = \langle y,z'\rangle$ und $h(z) = h(z')$ gilt. Dann ist $P \cong P^\perp$.

Im Fall II wird die Konstruktion einer Geraden P in V mit $P \cong P^\perp$ auf die obige zurückgeführt. Es werde V als 8-dimensionaler quadratischer Raum über k aufgefaßt; es sei $V = R_1 \perp R_2$ eine Zerlegung mit $\dim_k R_1 = \dim_k R_2 = 4$. Jeder hermitesche Raum über D hat, als quadratischer Raum über k aufgefasst, die Diskriminante 1. Nach obiger Konstruktion gibt es eine Ebene

$P_1 = \langle e_1, f_1 \rangle_k$ in R_1 mit $P_1^\perp = \langle \hat{e}_1, \hat{f}_1 \rangle_k \cong P_1$; ebenso gibt es eine Ebene $P_2 = \langle e_2, f_2 \rangle_k$ in R_2 mit $P_2^\perp = \langle \hat{e}_2, \hat{f}_2 \rangle_k \cong P_2$, wobei $h(e_1) = h(\hat{e}_1) = \xi_1$, $h(e_2) = h(\hat{e}_2) = \xi_2$, $h(f_1) = h(\hat{f}_1) = \eta_1$, $h(f_2) = h(\hat{f}_2) = \eta_2$ sei ($\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2 \in k^*$). Ist nun $1, \omega_1, \omega_2, \omega_3$ eine Basis von D über k, so setzen wir

$$x = e_1 + \omega_1 e_2 + \omega_2 f_1 + \omega_3 f_2, \quad y = \hat{e}_1 + \omega_1 \hat{e}_2 + \omega_2 \hat{f}_1 + \omega_3 \hat{f}_2$$

aus V_D. Dann gilt offenbar $h(x) = h(y)$ und $h(x,y) = 0$; $P = \langle x \rangle_D$ leistet also das Verlangte.

Der Induktionsanfang ist damit gewährleistet.

Der Induktionsschluss, mit $n \geqslant 3$ ist im Fall II ganz trivial. Denn $U_n(V)$ wird sicher von den Untergruppen $U(W)$ aller Hyperebenen W in V erzeugt; jedes $U(W)$ ist seine eigene Kommutatorgruppe, also auch $U_n(V)$.
Im Fall I muss dagegen noch der Fall $n = 5$ erledigt werden.

3. Es sei nun also V ein beliebiger anisotroper Raum der Dimension $n = 5$ (Fall I). Ein Vektor $a \neq 0$, ebenso die Hyperebene $\langle a \rangle^\perp$ heisse "speziell", wenn $h(a) = d = d(V)$ gilt. Dass es spezielle Vektoren in V gibt, folgt leicht aus dem HASSE-Prinzip; denn für ein unzerlegtes $\mathfrak{p} \in P_\infty^r(k)$, wo $V_\mathfrak{p}$ positiv bzw. negativ definit ist, ist $d > 0$ bzw. $d < 0$ für , weil d das Produkt von 5 Formenwerten ist. Eine Hyperebene W ist genau dann speziell, wenn $d(W) = 1$ ist. Dann heiße $U_4^+(W)$ eine spezielle

Untergruppe von $U_5^+(V)$.

Am Induktionsanfang haben wir eben gezeigt, dass für eine spezielle Hyperebene W die Gruppe $U_4^+(W)$ ihre eigene Kommutatorgruppe ist. Um dieselbe Behauptung für $U_5^+(V)$ nachzuweisen, genügt es also zu zeigen, dass $U_5^+(V)$ von den Gruppen $U_4^+(W)$ aller speziellen Hyperebenen in V erzeugt wird. Der Beweis dieser letzten Tatsache, die auch später im Beweis der Fasteinfachheit benutzt wird, verläuft analog zu dem des Satzes 1 und wird unten nachgetragen.

Damit ist die Gleichheit $U_n' = U_n^+$ für $n = 5$ (Fall I) bewiesen. Der Induktionsschluss, mit $n \geq 6$, ist nun ganz trivial.

Nun zum oben angekündigten und im Beweis des Theorems B verwendeten

SATZ 4.

Es sei V ein 5-dimensionaler anisotroper hermitescher Raum über einer quadratischen Erweiterung D eines algebraischen Zahlkörpers k. Dann wird $U_5^+(V)$ von von allen speziellen Untergruppen erzeugt.

Beweis. Es sei G die von allen speziellen Untergruppen erzeugte Untergruppe von U_5^+. Die Inklusion $U_5^+ \subseteq G$ folgt sofort aus der folgenden B e h a u p t u n g :

Zu jeder Isometrie $u \in U_5^+$ und zu jedem speziellen Vektor $x \in V$, gibt es ein $v \in G$ mit $v(x) = u(x)$.

Denn dann lässt $v^{-1}u$ den speziellen x fest; man kann also $v^{-1}u \in G$ auffassen. Somit ist auch $u \in G$.

Zum Beweis der Behauptung dürfen wir $u(x) \neq x$ annehmen; wir zeigen :

es gibt endlich viele Vektoren x_i, $1 \leqslant i \leqslant r$, mit $x_0 = x$ und $x_r = u(x) = y$, in V, derart dass jeder der Hyperebene $\langle x_{i-1} - x_i \rangle^{\perp}$ einen speziellen Vektor z_i enthält. Daraus wird die Behauptung folgen;denn x_{i-1}, x_i sind Vektoren gleicher Länge, es gibt also eine eigentliche Isometrie v_i von V, die x_{i-1} in x_i überführt und z_i festlässt, so daß also $v_i \in G$ gilt (man setze, nach dem Satz von Witt, die durch $x_{i-1} \to x_i$, $z_i \to z_i$ definierte Isometrie der Ebenen $\langle x_{i-1}, z_i \rangle$ und $\langle x_i, z_i \rangle$ fort zu einer eigentlichen Isometrie von V). Somit hat man für jedes $1 \leqslant i \leqslant r$ eine Isometrie $v_i \in G$ mit $v_i(x_{i-1}) = x_i$ Für $v = v_r \ldots v_1 \in G$ gilt dann $v(x) = x_r = u(x)$.

Zur Konstruktion der Vektoren x_i setzen wir $S = \{\mathfrak{P}: \mathfrak{P}$ kritisch bzgl. $V\}$. Ist $S = \emptyset$, so enthält schon $\langle x-y \rangle^{\perp}$ einen speziellen Vektor (vgl. (3.1)); wir sind dann fertig. Es sei also $S \neq \emptyset$. Für jedes $\mathfrak{P} \in S$ ist $U_5^+(V_{\mathfrak{P}})$ fasteinfach; $U_5^+(V_{\mathfrak{P}})$ wird also von seinen speziellen Untergruppen erzeugt. Für jedes $\mathfrak{P} \in S$ haben wir also eine Darstellung,

$$u = v_r^{\mathfrak{P}} \cdot \ldots \cdot v_1^{\mathfrak{P}}, \quad v_i^{\mathfrak{P}} \in U \quad \text{speziell.}$$

Setzen wir $v_i^{\mathfrak{P}}(x_{i-1}^{\mathfrak{P}}) = x_i^{\mathfrak{P}}$ für $1 \leqslant i \leqslant r$, mit $x_0^{\mathfrak{P}} = x$ für alle $\mathfrak{P} \in S$, so ist stets $x_r^{\mathfrak{P}} = u(x) := y$. Wir dürfen annehmen, dass $x_{i-1}^{\mathfrak{P}} \neq x_i^{\mathfrak{P}}$ gilt, für alle i und $\mathfrak{P}$. Wir zeigen, dass dann durch Hinzunahme weiterer spezieller Vektoren die Anzahl r für alle $\mathfrak{P} \in S$ als die gleiche erreicht werden kann, ohne dass dabei die Eigenschaften $x_{i-1}^{\mathfrak{P}} \neq x_i^{\mathfrak{P}}$, $x_r^{\mathfrak{P}} = y$ verloren gehen. Es genügt zu zeigen, wie man 2 oder 3 Vektoren hinzufügen kann. Ist $y \notin \langle x_{r-1}^{\mathfrak{P}} \rangle$, so gibt es sicher eine Isometrie $w_1 \in U_4^+(\langle x_{r-1}^{\mathfrak{P}} \rangle^{\perp})$, so dass $w_1(y) = y' \notin \langle y \rangle$ ausfällt. Ist aber $y = \lambda x_{r-1}^{\mathfrak{P}}$ (mit $\lambda \neq 1$), so gilt für den speziellen Vektor $z_r^{\mathfrak{P}}$, den $v_r^{\mathfrak{P}}$ festlässt, $z_r^{\mathfrak{P}} \notin \langle y \rangle$; denn sonst wäre $\mu y = z_r^{\mathfrak{P}} = v_r^{\mathfrak{P}}(z_r^{\mathfrak{P}}) = v_r(\mu\lambda x_{r-1}^{\mathfrak{P}}) = \mu\lambda x_r^{\mathfrak{P}} = \mu\lambda y$, also $y = \lambda y$. Dann gibt es aber eine Isometrie $w_1 \in U_4^+(\langle z_r^{\mathfrak{P}} \rangle^{\perp})$ mit $w_1(y) = y' \notin \langle y \rangle$. Wegen $y' \notin \langle y \rangle$ gibt es dann weiter eine Isometrie $w_2 \in U_4^+(\langle y \rangle^{\perp})$ mit $w_2(y') = \hat{y} \notin \langle y' \rangle$. Dann gilt $\hat{y} \notin \langle y \rangle$. Zur Verlängerung um 2 bzw. 3 Vektoren nehme man also y', y bzw. y', $\hat{y}$, y hinzu.

Für jedes $\mathfrak{P} \in S$ haben wir somit spezielle Vektoren

$$x_0^{\mathfrak{P}} = x, \; x_1^{\mathfrak{P}}, \; \ldots, \; x_{r-1}^{\mathfrak{P}}, \; x_r^{\mathfrak{P}} = y, \quad r \geqslant 1, \text{ aus } V_{\mathfrak{P}}$$

mit $x_{i-1} = x_i$ für alle i und $\mathfrak{P}$.

Nun approximieren wir jede der Vektorenfolgen $(x_i^{\mathfrak{P}})_{\mathfrak{P} \in S}$,

$i = 1,\ldots,r$ (ähnlich wie in Lemma 2) durch einen speziellen Vektor $x_i \in V$. Bei genügend guter Näherung wird auf Grund des Stetigkeitssatzes (§1.4) $\langle x_{i-1} - x_i \rangle_{\mathfrak{p}} \cong \langle x_{i-1}^{\mathfrak{p}} - x_i^{\mathfrak{p}} \rangle$ stattfinden, für alle i und $\mathfrak{p}$. Dann gilt auch

$$\langle x_{i-1} - x_i \rangle_{\mathfrak{p}}^{\perp} \cong \langle x_{i-1}^{\mathfrak{p}} - x_i^{\mathfrak{p}} \rangle^{\perp} .$$

Dass jede der Hyperebenen $\langle x_{i-1} - x_i \rangle^{\perp}$ einen speziellen Vektor enthält, folgt nun leicht aus dem HASSE-Prinzip. Denn für jedes $\mathfrak{p} \in S$ ist $\langle x_{i-1} - x_i \rangle_{\mathfrak{p}}^{\perp}$ isometrisch zu $\langle x_{i-1}^{\mathfrak{p}} - x_i^{\mathfrak{p}} \rangle^{\perp}$. Die spezielle Isometrie $v_i^{\mathfrak{p}}$ ist nicht Identität auf $\langle x_{i-1}^{\mathfrak{p}} - x_i^{\mathfrak{p}} \rangle$; der spezielle Vektor, den $v_i^{\mathfrak{p}}$ festlässt, liegt also in $\langle x_{i-1}^{\mathfrak{p}} - x_i^{\mathfrak{p}} \rangle^{\perp}$; denn aus $v(a) = b$, $a \neq b$ und $v(c) = c$ folgt, $h(a,c) = h(v(a),v(c)) = h(b,c)$, d.h. $c \in \langle a-b \rangle^{\perp}$. Für jedes $\mathfrak{p} \in S$, enthält also die $\mathfrak{p}$-adische Hülle von $\langle x_{i-1} - x_i \rangle^{\perp}$ einen speziellen Vektor.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

§ 8. Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe mittels Isomorphismen

Zum Schluss soll der Beweis der Fasteinfachheit der Kommutatorgruppe U_n' der unitären Gruppe U_n in den Fällen I,II, mittels Isomorphismen und unter Benutzung des Theorems B, durchgeführt werden.

Im Fall I besteht der erste Schritt wiederum in der Zurückführung auf Normalteiler von U_n. Dies ist zwar bereits in §4 beim direkten Beweis allgemein geschehen; für Normalteiler von U_n^+ ist dies jedoch sehr viel einfacher zu beweisen.

HILFSSATZ $\hat{2}$.

Es sei V ein anisotroper hermitescher Raum über D, der Dimension $n \geqslant 5$. Dann umfasst jeder nicht im Zentrum enthaltene Normalteiler $\hat{N}$ von U_n^+ einen nicht-zentralen Normalteiler von U_n .

Beweis. Zunächst eine Vorbetrachtung. Ist $a \in V$ ein beliebiger anisotroper Vektor, so lässt sich jede Isometrie $u \in U_n$ als Produkt einer eigentlichen Isometrie und einer Spiegelung an der Hyperebene $\langle a \rangle^{\perp}$

darstellen : $u = v.s_a$, mit $v \in U_n^+$.

Denn, ist $a, e_2, \ldots, e_n$ eine Orthogonalbasis von V und bezeichnet $\mu = \det u$, so braucht man nur zu definieren :

$$s(e_i) = e_i, \qquad v(e_i) = u(e_i) \quad \text{für} \quad 2 \leqslant i \leqslant n, \text{ und}$$

$$s(a) = a\mu, \qquad v(a) = u(a)\mu^{-1} .$$

Nach Hilfssatz 1 (§4.1) gibt es eine Isometrie $w \notin Z_n$ in $\hat{N}$, deren Fixraum mindestens die Dimension 2 hat. Man wähle $a \neq 0$ beliebig aus W; dann ist jede Spiegelung s_a mit w vertauschbar. Ist nun $u \in U_n(V)$ beliebig, so sei $u = vs_a$ eine Darstellung mit $v \in U_n^+$. Dann gilt

$$uwu^{-1} = v\, s_a w\, s_a^{-1} v^{-1} = vwv^{-1};$$

also liegt uwu^{-1} in $\hat{N}$. Somit ist der von w erzeugte Normalteiler von U_n in $\hat{N}$ enthalten .

LEMMA 6.

Es sei G eine Gruppe, die von einem System $(H_i)_{i \in I}$ ihrer Untergruppen erzeugt wird. Jede der Gruppen H_i sei fasteinfach; für jeden nicht-zentralen Normalteiler N von G sei $N \cap H_i$ nicht im Zentrum von H_i enthalten. Dann ist G fasteinfach.

Beweis. Klar.

Theorem Â. Es sei k ein algebraischer Zahlkörper, D eine quadratische Erweiterung von k oder ein Quaternionenschiefkörper über k. Es sei V ein anisotroper J-hermitescher Raum über D.

Für $n=4$, $d(V)=1$ oder für $n \geqslant 5$, im Fall I, bzw. für $n \geqslant 2$ im Fall II, ist die Kommutatorgruppe $U_n'(V)$ der unitären Gruppe $U_n(V)$ fasteinfach.

Beweis. Für $n=4$, $d(V)=1$ (Fall I) bzw. für $n = 2$ (Fall II) folgt die Behauptung unmittelbar aus der Isomorphie

$$U_4^+(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_6'(k,f) \quad \text{bzw.} \quad U_2(D,h)/\{\pm 1\} \cong O_5'(k,f)$$

(§5 bzw. §6), der Gleichheit $O_m' = \Omega_m$ und der Fasteinfachheit der Gruppe Ω_m (beide für $m \geqslant 5$), (Satz B bzw. C in [12], oder [6], chap. II, §12).

Der Übersichtlichkeit halber werde der Induktionsschluss getrennt vorgenommen. Zuerst betrachten wir den Fall I mit $n = 5$.

Es sei $N \subseteq U_5^+$ ein nicht-zentraler Normalteiler von U_5. Wir wählen eine Isometrie $u \in N$, aber nicht aus dem Zentrum. Sei $W = \langle b \rangle^{\perp}$ eine beliebige spezielle Hyperebene in V, also $h(b) = d(V)$. Wegen $\dim(W \cap uW) \geqslant 3$, können wir Vektoren $a \in W$ finden, derart dass auch $u(a)$ in W liegt, ohne aber $u(a) = a\lambda$ zu sein. Dann ist

die Ebene $P = \langle a, ua \rangle$ in der speziellen Hyperebene W enthalten. Im folgenden werde unter s_a stets die Spiegelung ${}^{-1}s_a$ verstanden. Da N Normalteiler in U_n ist, gehört

$$t = s_a s_{ua} = s_a u\, s_a u^{-1} \quad (\text{es ist } s_a^{-1} = s_a) \quad \text{zu}$$

$N \cap U_4^+(W)$. Wegen $ua \notin \langle a \rangle$ ist t eine von der Identität verschiedene Isometrie; also liegt t nicht im Zentrum von $U_4^+(W)$.

Jede andere spezielle Hyperebene $\hat{W}$ ist, nach dem Satz von Witt, isometrisch zu W; sei $w : W \to \hat{W}$ eine Isometrie. Dann ist

$$wtw^{-1} = w\, s_a s_{ua} w^{-1} = s_{wa} s_{wua} \quad \text{in} \quad N \cap U_4^+(\hat{W})$$

gelegen, nicht aber im Zentrum von $U_4^+(\hat{W})$.

Somit sind die Voraussetzungen des Lemma 6 (mit $G = U_5^+(V)$, $H_i = U_4^+(W)$, wo W alle spezielle Hyperebene durchläuft), unter Beachtung des Satzes 4 (§7.), erfüllt; damit ist die Behauptung für $n = 5$ (Fall I) bewiesen.

Der Induktionschluss, mit $n \geqslant 6$, verläuft völlig analog. Für jede (beliebige) Hyperebene findet man, genau wie oben, ein $t = s_a s_{ua}$ in $N \cap U^+(W)$, aber nicht im Zentrum von $U^+(W)$. Da $U_n^+(V)$ von den Gruppen $U^+(W)$ aller Hyperebenen erzeugt wird, ist Lemma 6 anwendbar.

Damit ist die Behauptung für den Fall I vollständig bewiesen.

Nun zum Fall II. Sei $n \geq 3$. Für jede Hyperebene W in V findet man auch hier einen Vektor $a \in W$ mit $ua \in W$, aber $ua \notin \langle a \rangle$, wobei $u \in N$, aber nicht aus dem Zentrum, gewählt wurde. Ist $\dim(W \cap uW) \geq 2$, was für $n \geq 4$ stets der Fall ist, ist dies klar. Für $n = 3$ gilt dies auch dann, wenn $\dim(W \cap uW) = 1$ sein sollte. Denn, ist $\hat{a}, \hat{b}$ eine Basis von W und $W \cap uW = \langle \hat{b} \rangle$, etwa, so gilt $u\hat{a} = \lambda\hat{b}$, $u\hat{b} = \nu\hat{b}$, mit $\lambda, \nu \in D^*$. Für den Vektor $a = \hat{a} + \hat{b}$ gilt dann $ua \neq \mu a$, für alle $\mu \in D$, denn sonst wären $\hat{a}, \hat{b}$ linear anhängig. Also ist $P = \langle a, ua \rangle$ stets eine Ebene in V. Der Rest des Beweises ist wörtlich derselbe wie früher.

Damit ist das Theorem $\hat{A}$ vollständig bewiesen.

Literaturverzeichnis

[1] A.A.Albert : Structure of algebras, AMS Colloquium Publications 24, New York 1939.

[2] E.Artin : Geometric algebra, Tracts in maths. 3, Interscience, New York 1957.

[3] S.Böge (geb.Becken) : Schiefhermitesche Formen über Zahlkörpern und Quaternionenschiefkörpern, J.reine angew. Math. 221 (1966), 85-112.

[4] N.Bourbaki : Algèbre, chap. 9 (Éléments de math. Livre 2) ASI 1272, Hermann, Paris 1959.

[5] M.Deuring : Algebren, Ergebnisse d.Math. Springer 1935.

[6] J.Dieudonné : La géométrie des groupes classiques, Ergebnisse d.Math. N.F.5, Springer 1963.

[7] — : Orthogonal and unitary groups over the rational field, Am.J.Math. 73(1951), 940-948.

[8] — : Structure of unitary groups, Trans.Am.Math.Soc. 72 (1952), 367-385.

[9] — : Les extensions quadratiques des corps non commutatifs et leurs applications, Acta Math. 87 (1952), 175-242.

[10] M.Eichler : Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Grundlehren d.math.Wiss 63, Springer-Verlag 1952.

[11] H.Hijikata : Hasse's principle on quaternionic antihermitian forms, J.Math.Soc. Japan 15 (1963), 165-175.

[12] M.Kneser : Orthogonale Gruppen über algebraischen Zahlkörpern, J.reine angew.Math. 196 (1956), 213-220.

[13] — : Schwache Approximation in algebraischen Gruppen, Colloq.théorie d.groupes algébriques, CBRM Bruxelles 1962.

[14] — : Galois cohomology of classical groups, Lecture notes, Tata Institute of Fundamental Research, Bombay 1967.

[15] W.Landherr : Äquivalenz hermitescher Formen über einem beliebigen algebraischen Zahlkörper, Abh.Math.Sem. Univ.Hamburg 11(1935),245-248.

[16] — : Liesche Ringe vom Typus A über einem algebraischen Zahlkörper und hermitesche Formen über einem Schiefkörper, Abh.Math.Sem.Univ.Hamburg 12(1938),200-241.

[17] O.T.O'Meara : Introduction to quadratic forms, Grundlehren d.math.Wiss 117, Springer 1963.

[18] K.G.Ramanathan : Quadratic forms over involutorial division algebras, J.Ind.Math.Soc.(N.S.) 20 (1956), 227-257.

[19] I.Satake : Remarks to the preceding paper (hier [21]) of Tsukamoto, J.Math.Soc.Japan 13 (1961), 401-409.

[20] G.Shimura : Arithmetic of alternating forms and quaternion hermitian forms, J.Math.Soc.Japan 15 (1963), 33-65.

[21] T.Tsukamoto : On the local theory of quaternionic anti-hermitian forms, J.Math.Soc.Japan 13 (1961), 387-400.

Herrn Professor Dr. M. Kneser
danke ich für die Anregung zu dieser
Arbeit und ihre ständige Förderung

Herrn Dr. H. Behr danke ich für eine
kritische Durchsicht des Manuskripts

Dem Deutschen Akademischen Austauschdienst
danke ich für die Gewährung eines langjährigen
Stipendiums, das mein Studium in Deutschland
ermöglicht hat

L e b e n s l a u f

Ich wurde als jüngstes Kind des Studiendirektors H.A.Chowdhury und seiner Ehefrau Ayatunnisa geb. Khan, am 17. Januar, 1941 in Faridpur, Ostpakistan, geboren. Als Schüler der Barisal Zilla School legte ich 1956 die Matriculation Prüfung (mittlere Reife) ab. Das Reifezeugnis (I.Sc.) erwarb ich 1958 von Notre Dame College, Dacca. Im Herbst 1958 schrieb ich mich zum Studium der Physik an der Universität Dacca ein. Ende 1959 bewarb ich mich um ein Stipendium des Deutschen Akademischen Austauschdienstes. Im Herbst 1960 kam ich nach Deutschland, nach dem ich kurz vorher die B.Sc. Prüfung abgelegt hatte.

Im Winter 1960 nahm ich das Studium der Mathematik an der Universität Hamburg auf. In November 1962 legte ich dort die Diplom-Vorprüfung ab. Ich liess mich für das Sommersemester 1963 beurlauben und weilte von März bis Oktober 1963 zu Haus. Nach meinem Rückkehr setzte ich mein Studium an der Universität Göttingen fort. Im Frühjahr 1965 erhielt ich von Herrn Professor Kneser ein Thema zur Bearbeitung, aus der meine Diplomarbeit und die vorliegende Dissertation entstanden sind. Die Diplom-Hauptprüfung legte ich hier im Juli 1966 ab.

Meinen akademischen Lehrer, insbesondere den Herren Professoren E.Artin†, H.Bauer, L.Collatz, M.Deuring, H.Grauert, M.Kneser, G.Lüders, W. Maak, C.Meyer, R.Remmert, bin ich zu grossem Dank verpfichtet.